

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Transformações Geométricas no Plano

Paulo Araújo da Silva

novembro de 2014
São Cristóvão-SE

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Paulo Araújo da Silva

Transformações Geométricas no Plano

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a conclusão do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT).

ORIENTADOR: Prof. Dr. J. Anderson Valença Cardoso

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Ricardo Pinheiro da Costa

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno **Paulo Araújo da Silva**, orientada pelo Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso e orientada pelo Prof. Dr. Ricardo Pinheiro da Costa.

novembro de 2014
São Cristóvão-SE

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA
CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

S586t Silva, Paulo Araújo da
Transformações geométricas no plano / Paulo Araújo da Silva ;
orientador José Anderson Valença Cardoso. – São Cristóvão, 2016.
68 f. ; il.

Dissertação (mestrado Profissional em Matemática) –
Universidade Federal de Sergipe, 2016.

O

- 1 Transformação geométrica. 2. Homotetias. 3. Cisalhamento. 4.
Isometria. 5. Morfismos. 6. Combinação linear. 7. Convexa. I.
Cardoso, José Anderson Valença, orient. II. Título

CDU: 514

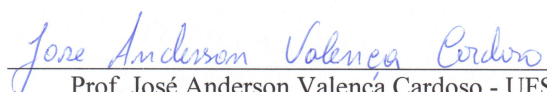
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Transformações geométricas no plano

por

Paulo Araujo da Silva


Aprovada pela Banca Examinadora:



Prof. José Anderson Valença Cardoso - UFS
Orientador



Prof. André Vinicius Santos Dória - UFS
Primeiro Examinador



Prof. Ricardo Pinheiro da Costa - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 21 de Novembro de 2014.

Dedico este trabalho aos meus pais (in memoriam), pessoas que não tiveram estudo, mas fizeram de tudo para que seus filhos tivessem, à minha esposa Gilvaneide Gomes Lima Araújo e em especial aos meus filhos Leonardo Lima Araújo e Paula Larissa Lima Araújo, para que eles tomem como exemplo de dedicação, força de vontade e amor a profissão de professor que ajuda a formar todas as outras profissões.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, o Grande Arquiteto do Universo, que me deu Saúde, Sabedoria e Segurança para que conseguisse concluir este trabalho. Ao meu orientador Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso que se dispôs a me orientar e em especial ao prof. Dr. Ricardo Pinheiro da Costa por sua contribuição no meu TCC. À minha esposa Gilvaneide e meus filhos Leonardo Lima e Paula Larissa que entenderam minha ausência nos finais de semana durante esses dois anos e meio. Agradeço também a SBM pela brilhante idéia de criação do curso e em especial à CAPES pelo apoio financeiro que foi essencial no decorrer do curso.

Resumo

No presente trabalho fazemos um estudo sobre transformações geométricas no plano, explorando características geométricas e algébricas. A relação entre a geometria e a álgebra é responsável por extraordinários progressos na matemática e suas aplicações. Nosso objetivo inicial é apresentar algumas das principais transformações geométricas, a exemplo das Homotetias, das Translações, de Cisalhamentos, das Simetrias, das Rotações, das Reflexões, das Isometrias, etc., de forma intuitiva e ilustrando com exemplos simples. Em seguida exploramos características algébricas elementares que permitem tratar e generalizar o estudo de transformações. Apresentamos ainda os conceitos de Morfismos e Deformações de imagens utilizando noções, por exemplo, como Combinação Linear Convexa.

Palavras Chaves: Transformação Geométrica, Homotetias, Translações, Rotações, Cisalhamento, Isometria, Morfismos, Deformações, Combinação Linear Convexa

Sumário

Resumo	vii
Introdução	1
1 Homotetias e Contrações no Plano	3
1.1 Contração a um Ponto	3
1.2 Contração a uma Reta	7
2 Vetores e Transformações Lineares no Plano	13
2.1 Coordenadas e distância na reta	14
2.2 Distância entre pontos no plano	16
2.3 Vetores	18
2.3.1 Segmentos Orientados	18
2.3.2 Sistema de Coordenadas	21
2.4 Transformações lineares	40
2.5 Geometria das Transformações Lineares	45
2.6 Transformação do Gato de Arnold	48
3 Deformações e Morfismos Geométricos	50
3.1 Deformações e Morfismo	50
3.2 Morfismo	55
Referências Bibliográficas	59

Introdução

As transformações geométricas fazem parte da história da humanidade, há mais tempo do que se possa imaginar. Uma das primeiras evidências aparece na pintura rupestre do sítio de El Buey na Bolívia.



Figura 1: Pintura Rupestre

Neste trabalho fizemos um estudo das transformações geométricas no plano \mathbb{R}^2 sob o ponto de vista geométrico e algébrico, tendo como objetivo obter o significado geométrico das matrizes. De acordo com Lima [5], “A interconexão entre geometria e álgebra resultante desse ponto de vista foi responsável por extraordinários progressos na matemática e suas aplicações”.

Referente ao ensino das matrizes, Dante [4] defende que as matrizes devem ser exploradas não só como objeto matemático, mas como código de imagens, tabela de dupla entrada. Por exemplo, uma imagem de resolução 600×800 tem $600 \cdot 800 = 480000$ pixels distribuídos em 600 linhas e 800 colunas. Quando um programa gráfico altera a posição, reflete, rotaciona ou muda a escala da imagem, na verdade está mudando a posição dos pixels que a formam. Isso tudo é feito por operações de matrizes, em computação gráfica é o que se chama de transformações Geométricas no plano. Basicamente, as transformações geométricas no plano são quatro: rotação, reflexão, escala e translação; Lima [5] concorda que uma das justificativas para o estudo de matrizes são as transformações geométricas e que as mesmas trariam um significado às operações entre matrizes, principalmente a multiplicação. Porém os livros didáticos no ensino médio, em sua maioria, não abordam matrizes associando-as a transformações geométricas.

Segundo Anton [1] a principal aplicação de deformações e morfismos tem sido a produção de efeitos especiais no cinema, na televisão e na propaganda. No entanto, também surgiram muitas aplicações científicas e tecnológicas para estas técnicas. Por exemplo, a assistência à cirurgia plástica e de reconstrução, a investigação de variações no projeto de um produto e o “envelhecimento” de fotografias de pessoas desaparecidas ou suspeitas da polícia. Imagine um sistema cartesiano ortogonal

com a origem no centro da tela do monitor (suposta plana) e um ponto qualquer $(X, Y) = P$.

Por meio de um produto de matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

Obtemos um novo ponto $(X', Y') = P'$, tal que: $X' = ax + by$ e $Y' = cx + dy$.

As relações entre matrizes e as transformações geométricas possibilitam a integração entre geometria e álgebra, campos distintos da matemática, mas, assim como nos livros didáticos, são ignorados por muitos professores de matemática no ensino médio.

Para alcançarmos o objetivo proposto, iniciaremos o estudo pelas contrações a um ponto ou a uma reta, conforme Shervatov [7] onde obteremos uma ampliação ou uma redução da figura original, através de um fator k , ou seja, uma semelhança que preserva ou inverte o posicionamento da figura. No Capítulo 2, de acordo com [1, 2, 3, 6, 4], falaremos sobre o estudo dos vetores com suas representações e operações no plano, envolvendo translação de rotação e veremos as transformações lineares em \mathbb{R}^2 com o estudo das matrizes e a geometria das transformações lineares. Finalizando com o Capítulo 3 veremos as transformações geométricas do gato de Arnold no quadrado unitário e deformações e morfismos de imagens em \mathbb{R}^2 , bem como os modelos básicos de deformações como: cisalhamento puro, cisalhamento simples, rotação e mudança de área. A forma mais adequada para o tratamento dessa questão é através do cálculo matricial, envolvendo matrizes quadradas de ordem 2.

Capítulo 1

Homotetias e Contrações no Plano

No presente capítulo buscamos apresentar de forma intuitiva conceitos geométricos que serão formalizados e estendidos em termos algébricos elementares nos capítulos seguintes.

1.1 Contração a um Ponto

Na solução de certos problemas geométricos, usa-se, com frequência, uma transformação denominada *Contração a um Ponto* ou *Homotetia*. Na contração ao ponto O (chamado de centro de contração), realizada com o fator de contração k , significa que cada ponto A de um plano passa ao ponto A' na reta determinada por O e A , sendo

$$k = \frac{|OA'|}{|OA|},$$

onde por $|OA|$ estamos representando a distância do ponto O ao ponto A (veja Figura 1.1).

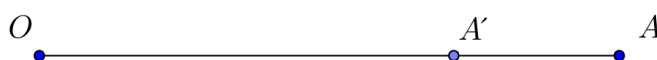


Figura 1.1: Contração

Se o fator de contração k é maior que 1 (veja Figura 1.2), então $|OA'| > |OA|$. Nesse caso, a transformação poderia se chamar “expansão ao ponto O ”.

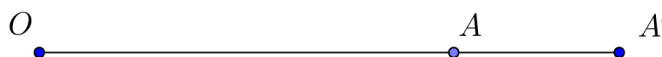


Figura 1.2: Expansão

Na homotetia ao ponto O , cada figura F se transforma em outra F' (veja Figura 1.3) semelhante à original, com o centro de semelhança no ponto O e fator de semelhança igual a k . Se $k < 1$ a nova figura tem sua área reduzida e quando $k > 1$ a sua área será aumentada.

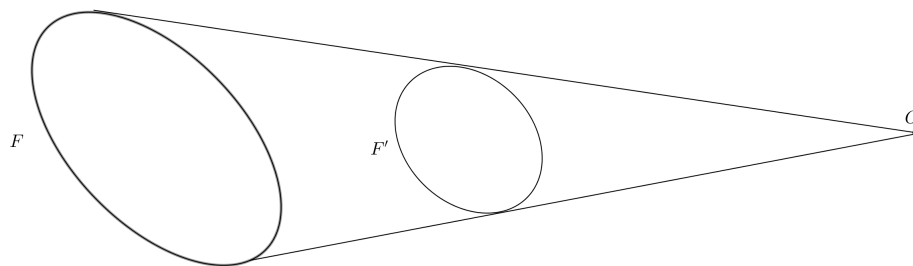


Figura 1.3: Figura Semelhante

Contração de Retas a um Ponto

No caso de contração de uma reta, ao contrai-la transforma-se a mesma em outra reta (veja Figura 1.4).

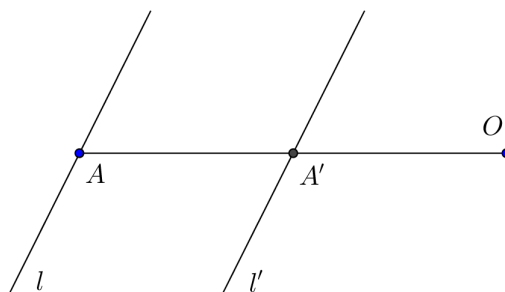


Figura 1.4: Reta

Além disso, retas paralelas se transformam em retas paralelas (veja Figura 1.5)

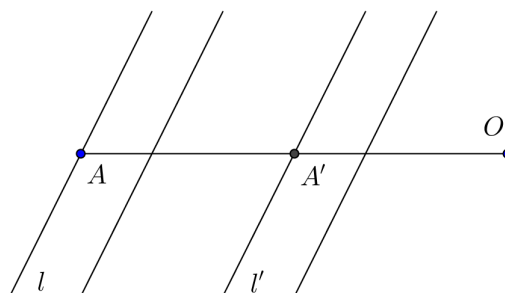


Figura 1.5: Retas Paralelas

Contração de Circunferências a um Ponto

Quando se faz a contração a um ponto de uma circunferência, converte-se a mesma em uma outra circunferência (veja Figura 1.6).

Contração a um Ponto e Área

Numa homotetia, todos os segmentos de um plano diminuem ou aumentam por uma relação constante k . As áreas de todas as figuras também diminuem ou

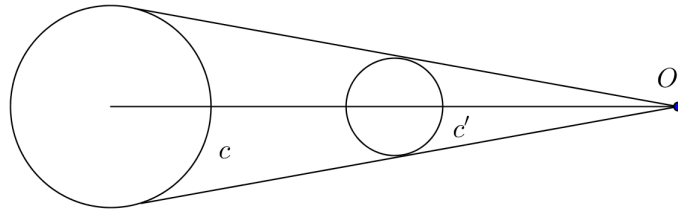


Figura 1.6: Contração de uma Circunferência a um Ponto

aumentam por uma relação constante igual a k^2 (quadrado do fator de contração). Antes de ilustrar o conceito em uma figura qualquer, vamos fazer uma breve análise do caso de uma figura retangular.

Exemplo 1.1. *Obtenha a figura transformada do retângulo $ABCD$, com centro O e razão 3.*

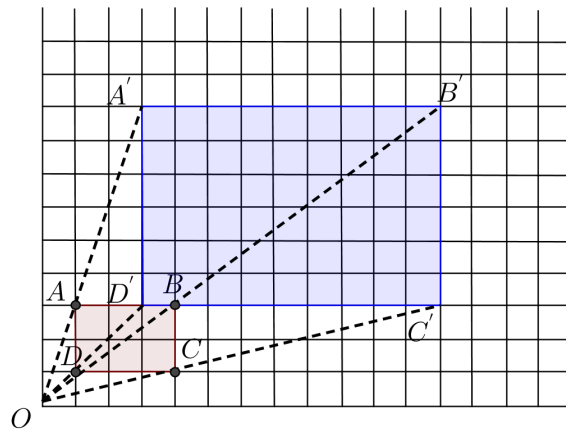


Figura 1.7: Área de Figura

Com o caso de figura retangular entendido podemos ilustrar o caso de uma figura arbitrária. Com efeito, seja F uma figura plana. Analisemos uma retícula composta por um certo número de quadrados pequenos de mesma área (veja Figura 1.8). A

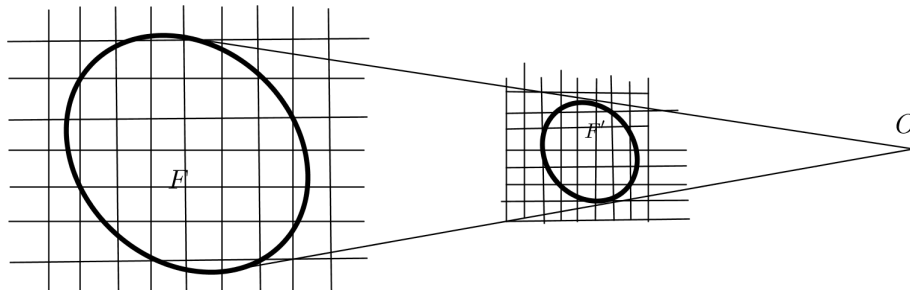


Figura 1.8: Figura Decomposta em Quadrados

área de F é aproximadamente igual ao número de quadrados que se encontram dentro da figura F , multiplicado pela área do quadrado. O erro será tanto menor quanto

maior for o número de quadrados na retícula. Tomando quadrados suficientemente pequenos, podemos tornar o erro tão menor quanto se deseja. Na homotetia, a retícula de quadrados se transforma em uma nova retícula de quadrados, enquanto que a figura F se transforma na figura F' , dentro da qual haverá tantos quadrados da nova retícula (menores em área se $k < 1$ e maiores, se $k > 1$) quantos continham na figura original F . A área da nova figura F' é aproximadamente igual ao número de quadrados contidos nela, multiplicado pela área do quadrado. Mas a área de cada quadrado novo é igual a do quadrado original, multiplicado por k^2 , dado que cada lado do quadrado, na contração ao ponto, é multiplicado por k , conforme ilustrado no Exemplo 1.1. Por isso temos que:

A área de F' é igual a área de F multiplicada por k^2 .

Exemplo 1.2. *O efeito geométrico de uma homotetia é de ampliação ou redução de figuras. Comumente tratamos o caso $k > 0$, e chamamos o caso $k < 0$ de homotetia inversa. Em ambos os casos, quando $|k| > 1$, a figura homotética é uma ampliação da figura inicial; quando $|k| = 1$, a figura homotética é congruente à figura inicial; e quando $|k| < 1$, a figura homotética é uma redução da figura inicial.*

O pentágono $VA'B'C'D'$ é uma ampliação do pentágono $VABCD$, com razão $k > 1$.

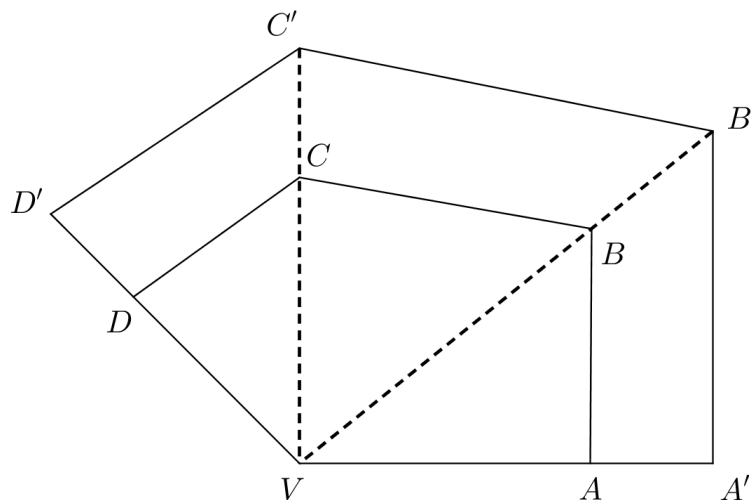


Figura 1.9: Ampliação de Pentágono

Exemplo 1.3. *Examinemos a resolução do seguinte problema que ilustra a aplicação da contração ao ponto:*

Dado um triângulo ABC , inscrever nele um retângulo áureo tendo o seu lado maior contido no lado BC .

Solução: Considera-se um triângulo ABC . Constrói-se um quadrado $PQRS$ em seu interior, de modo que o lado PQ esteja contido no lado BC do triângulo e o vértice S pertença ao lado AB . Seja M o ponto médio do segmento PQ . Com centro em M e raio MR , traça-se um arco encontrando BC no ponto N . Seja O o ponto

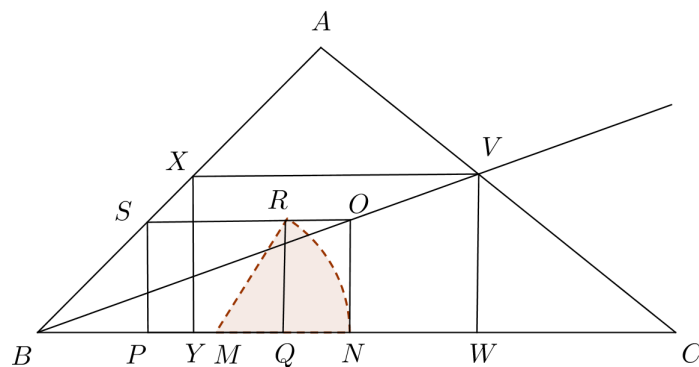


Figura 1.10: Retângulo Inscrito

de interseção da reta paralela a BC passando por S com a reta perpendicular a BC , passando por N . O retângulo $PNOS$ é um retângulo áureo (por construção). Para inscrever esse retângulo no triângulo ABC , considera-se a semi-reta com origem em B passando por O , sendo V o ponto de interseção da semi-reta com AC . Para encontrar os outros vértices do retângulo considera-se a homotetia de centro B e fator de contração $\frac{|BV|}{|BO|}$. O retângulo $XYWV$ é o retângulo áureo inscrito no triângulo ABC .

1.2 Contração a uma Reta

Na geometria, em diversas situações é conveniente aplicar uma transformação que chamamos de “contração a uma reta”. Na contração a uma reta (digamos l , denominada de eixo de contração), com fator de contração k , cada ponto A do plano passa ao ponto A' do raio PA , perpendicular ao eixo, sendo

$$k = \frac{|PA'|}{|PA|},$$

ou seja, $|PA| = k|PA'|$ (veja Figura 1.11,(a)).

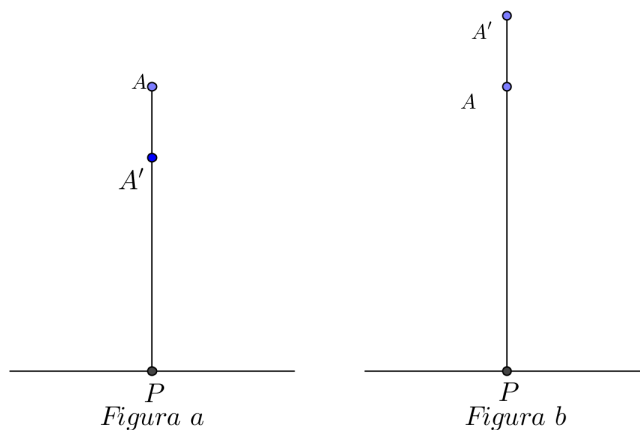


Figura 1.11: Contração a uma Reta

Quando $k > 1$ (veja Figura 1.11, (b)), temos

$$|PA'| > |PA|,$$

e nesse a transformação poderia se chamar de “expansão ao eixo de contração”. Todos os pontos do eixo de contração, durante a contração, permanecem em seus locais de origem (não mudam de posição).

A contração a uma reta tem propriedades análogas à da contração a um ponto.

Contração de Retas a uma Reta

A primeira propriedade que podemos apresentar é a seguinte:

Na contração a uma reta, cada reta se transforma em outra reta.

Para justificar essa afirmação, comecemos com uma reta paralela ao eixo de contração. Se uma reta l é paralela ao eixo de contração e d é a distância entre estas retas, então a reta l se transforma na reta l' , paralela ao eixo de contração, sendo a distância entre l' e o eixo de contração igual a $k \cdot d$ (veja Figura 1.12).

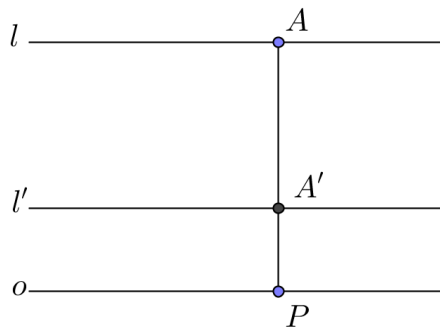


Figura 1.12: Contração de reta paralela ao eixo x

Agora, suponhamos que l não seja paralela ao eixo de contração e designemos por O , o ponto de interseção de l com o eixo de contração (veja Figura 1.13).

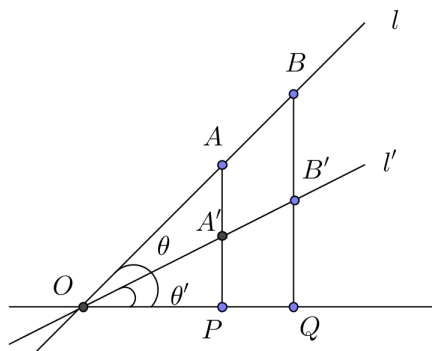


Figura 1.13: Contração de reta não paralela ao eixo x

Como contração os pontos dos eixos não se alteram, o ponto O permanece em seu lugar. Sejam

- (i) A um ponto arbitrário na reta l (diferente de O);
- (ii) A a posição ocupada pelo ponto A após sofrer uma contração ao eixo de contração e
- (iii) $k = \frac{|PA'|}{|PA|}$.

Escolhamos outro ponto B na reta l . Se B' é um ponto de interseção entre a reta OA' e a perpendicular BQ , traçada desde o ponto B ao eixo de contração, então

$$\frac{|B'Q|}{|BQ|} = \frac{|A'P|}{|AP|} = k,$$

isso garantido pelo Teorema de Tales ou pela semelhança dos triângulos OQB e OPA , OQB' e OPA' . Assim sendo, vemos que na contração ao eixo de contração, o ponto B passa ao ponto B' . Como B é um ponto arbitrário da reta l , esta última passa, na contração ao eixo de contração, à reta OA' , designada naturalmente por l' . Portanto, temos a justificativa da propriedade.

Observação 1.4. Se θ e θ' são os ângulos formados pelas retas l e l' com o eixo de contração, respectivamente, então pela definição da tangente obtemos (veja Figura 1.13):

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{|PA'|}{|PO|} = \frac{k \cdot |PA|}{|PO|} = k \cdot \frac{|PA|}{|PO|} = k \cdot \operatorname{tg}(\theta').$$

Uma segunda propriedade da contração a uma reta é a seguinte:

Na contração a uma reta, retas paralelas se transformam em retas paralelas.

Para verificar a validade da propriedade, sejam l e m retas paralelas. Após sofrerem uma contração ao eixo de contração, as retas l e m passam a l' e m' . Supondo que l' e m' tivessem um ponto em comum, isso resultaria que l e m também teriam um ponto em comum (contradição). Logo l' e m' são também retas paralelas (veja Figura 1.14).

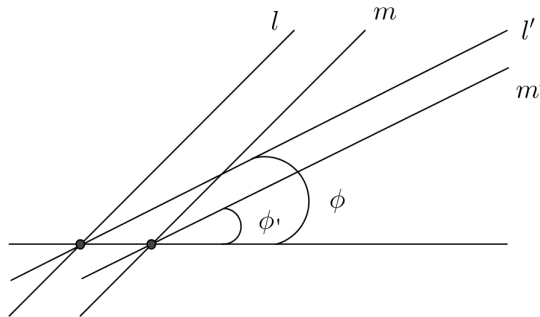


Figura 1.14: Contração de Retas Paralelas ao Eixo de Contração

Uma terceira propriedade da transformação de contração a uma reta é:

Na contração a uma reta, a relação entre segmentos dispostos em uma reta permanece constante (veja Figura 1.15).

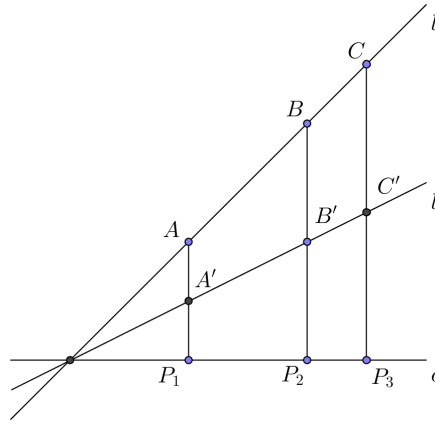


Figura 1.15: Relação de segmentos de Reta após Contração

Observe que aplicando o Teorema de Tales na Figura 1.15), teremos sempre:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}.$$

Contração de Circunferências a uma Reta

Ao contrário da homotetia, a contração a uma reta não transforma uma circunferência em outra. Realizada uma contração a uma reta, uma circunferência se transforma em uma Elipse (veja Figura 1.16).

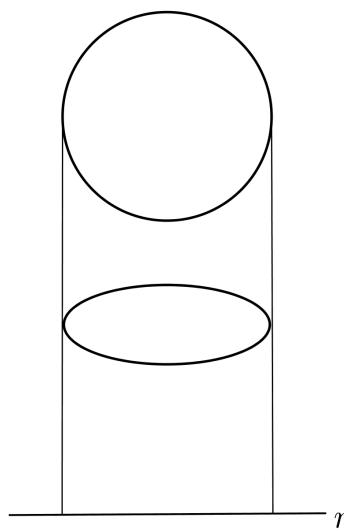


Figura 1.16: Contração de Circunferência a uma Reta, obtém-se Elipse.

Contração de Figura a uma Reta

Na transformação de contração a uma reta, uma figura F se transforma em outra figura F' , não necessariamente semelhante a F . Na Figura 1.17 temos ilustrada uma contração a uma reta com, por exemplo, fator de contração $k = 1/3$ de modo que

$$\frac{P_1 A'_1}{P_1 A_1} = \frac{P_1 A'_2}{P_1 A_2} = \dots = \frac{1}{3}.$$

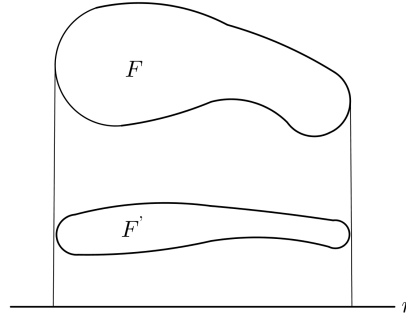


Figura 1.17: Contração de Figura a uma Reta

Contração a uma Reta e Área

Com um raciocínio semelhante ao do caso de contração a um ponto, podemos analisar o caso da relação da área de uma figura geométrica após executada a transformação. Essa relação é a seguinte:

Na contração a uma reta, uma figura F' obtida da contração de uma figura F tem a área igual a área de F multiplicada pelo fator de contração k .

Antes de apresentar uma justificativa heurística da relação de área de uma figura qualquer obtida por contração a uma reta, vamos primeiro observar o caso de um retângulo.

Exemplo 1.5. Observe que a figura obtida pela contração à reta AB , com fator de contração $k = 3$, do retângulo $ABCD$ é o retângulo $A'B'C'D'$. Além disso, note que a área do retângulo $A'B'C'D'$ é 3 vezes a área de $ABCD$ (veja Figura 1.18).

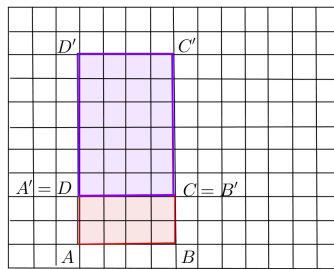


Figura 1.18: Área de Retângulo após Contração

Vamos agora examinar o caso de uma figura F e a retícula composta de quadrados com mesma área (Figura 1.19). O raciocínio não difere daquele mostrado no caso da homotetia (contração a um ponto), realizado com o fator de contração k , em que as áreas eram multiplicadas por k^2 . Note que a área de F é aproximadamente igual ao número de quadrados dentro de F multiplicado pela área do quadrado. Consideremos que uma das direções das linhas da retícula seja paralela ao eixo de contração. Após a contração, a retícula de quadrados se transformará na retícula de

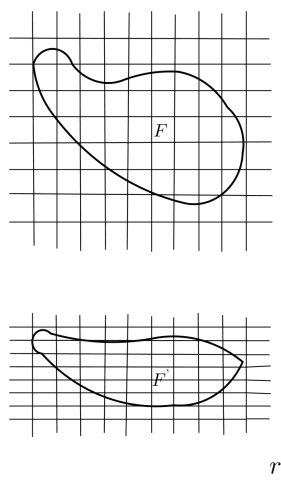


Figura 1.19: Figura Decomposta em Quadrados

retângulos. As áreas dos retângulos são iguais ao produto da área do quadrado pelo fator de contração k . Note que o comprimento de dois lados paralelos do quadrado não variam (os que são paralelos ao eixo de contração) e que o comprimento dos outros dois lados (perpendiculares ao eixo de contração) ficam multiplicados por k .

Capítulo 2

Vetores e Transformações Lineares no Plano

Nesse capítulo, introduziremos coordenadas na reta e no plano, para representar pontos por meio de números reais. A linguagem básica que utilizaremos continua com a apresentação dos vetores no plano e de suas principais propriedades. A representação dos pontos por suas coordenadas torna possível resolver algebricamente diversos problemas geométricos, e o uso de vetores permite o estudo de vários conceitos geométricos de forma mais simples e direta.

Para isso, admitiremos que o leitor tenha conhecimento dos axiomas e dos principais resultados elementares da Geometria Euclidiana Plana, relativos aos seus elementos básicos: retas e planos. Vamos rever alguns axiomas e resultados da Geometria Euclidiana que serão úteis na construção da Geometria Analítica:

- por dois pontos distintos passa uma única reta (axioma de incidência);
- dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r , existe uma única reta paralela à reta r que passa por P (axioma das paralelas);
- dados um ponto P e uma reta r , existe apenas uma reta perpendicular a r que passa por P ;
- por três pontos do espaço não situados numa mesma reta passa um único plano (axioma da incidência).

Além desses, utilizaremos vários outros resultados da Geometria Euclidiana, como o Teorema de Pitágoras, Lei dos Cossenos, os casos de congruência entre triângulos etc.

A partir dos elementos básicos da Geometria Euclidiana Plana e dos axiomas de ordem, podemos definir dois conceitos fundamentais:

Sejam A e B dois pontos distintos. O segmento de reta AB é o conjunto formado pelos pontos A e B e pelos pontos C entre A e B , e a semireta \overrightarrow{AB} é o conjunto formado pelo segmento AB e por todos os pontos D tais que B está entre A e D .

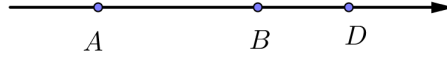


Figura 2.1: Ponto D na semireta AB

Para iniciarmos nosso estudo, devemos lembrar que, na Geometria Euclidiana Real, fixada uma unidade de comprimento, a cada par de pontos A e B corresponde um número real, denominado **distância** entre os pontos A e B ou **comprimento** do segmento AB , e designado por $d(A, B)$ ou $|AB|$, respectivamente, que satisfaz às seguintes propriedades:

1. $d(A, B) \geq 0$;
2. $d(A, B) = 0 \iff A = B$;
3. $d(A, B) = d(B, A)$;
4. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (**desigualdade triangular**)
5. $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) \iff A, B$ e C são colineares e C está entre A e B .

Finalmente, precisamos lembrar que dados uma semireta \overrightarrow{CD} e um número real $\lambda > 0$, existe um único ponto F pertencente a \overrightarrow{CD} tal que $|CF| = \lambda$.

2.1 Coordenadas e distância na reta

Sejam r uma reta e \overrightarrow{OA} uma semireta de r com origem num ponto escolhido O de r . Considere B um ponto de r tal que O está entre A e B . A semireta \overrightarrow{OB} é dita *oposta* à semireta \overrightarrow{OA} .

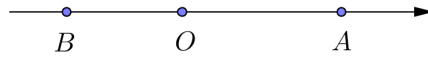


Figura 2.2: A reta r

A reta r é posta em correspondência com o conjunto dos números reais \mathbb{R} da seguinte maneira:

- à origem O fazemos corresponder o número 0 (zero);
- cada $X \neq O$, da semireta \overrightarrow{OA} , fazemos corresponder o número real positivo $x = d(O, X)$;
- cada ponto $X \neq O$, da semireta \overrightarrow{OB} , fazemos corresponder o número real negativo $x = -d(O, X)$.

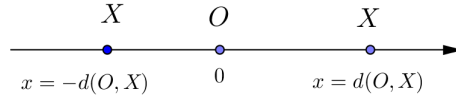


Figura 2.3: Coordenadas dos pontos da reta r

Definição 2.1. O número real x que corresponde ao ponto X segundo a correspondência acima estabelecida é denominada a coordenada do ponto X .

Definição 2.2. Sejam X e Y pontos da reta r com coordenadas x e y , respectivamente. Dizemos que o ponto Y está à direita do ponto X (ou que o ponto X está à esquerda do ponto Y) se, somente se, $x < y$.

Dessa forma, os pontos da semireta \overrightarrow{OA} distintos de O estão à direita de O e os pontos da semireta oposta a \overrightarrow{OA} estão à esquerda de O .

Assim, a semireta \overrightarrow{OA} estabelece um sentido de percurso na reta r . Uma reta sobre a qual foi escolhida uma semireta \overrightarrow{OA} denominada eixo E de origem O e direção induzida pela semireta \overrightarrow{OA} .

Proposição 2.3. Se x e y são coordenadas dos pontos X e Y sobre o eixo E , respectivamente, então $d(X, Y) = |x - y|$.

Demonstração. É fácil verificar o resultado quando $X = Y$ ou $X = 0$ ou $Y = 0$. Suponhamos que X , Y e O sejam três pontos distintos. Sem perda de generalidade, suponhamos que X está à esquerda de Y , isto é, $x < y$. Temos então três casos a considerar.

Caso 1. Se X e Y estão à direita da origem. Isto é, $0 < x < y$. Neste caso, X está

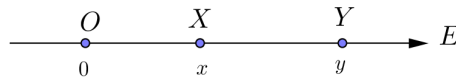


Figura 2.4: Caso 1. $0 < x < y$

entre O e Y , pois, caso contrário, Y estaria entre O e X e $d(O, Y) = y$ seria menor que $d(O, X) = x$. Logo,

$$\begin{aligned} d(O, Y) &= d(O, X) + d(X, Y) \iff y = x + d(X, Y) \\ &\iff d(X, Y) = y - x = |y - x|. \end{aligned}$$

Caso 2. Se X está à esquerda de O e Y está à direita de O . Isto é, $x < 0 < y$. De maneira análoga ao caso anterior, verificamos que Y está entre X e O . Assim,

$$\begin{aligned} d(X, O) &= d(X, Y) + d(Y, O) \iff -x = d(X, Y) - y \\ &\iff d(X, Y) = y - x = |y - x|. \end{aligned}$$

Caso 3. Se X está à esquerda de O e Y está à direita de O . Isto é, $x < 0 < y$. Neste

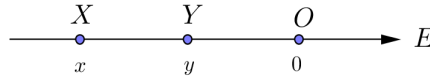


Figura 2.5: Caso 2. $x < y < 0$

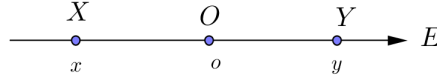


Figura 2.6: Caso 3. $x < 0 < y$

caso, Y está na semireta \vec{OA} e X está na semireta oposta a \vec{OA} . Portanto, O está entre X e Y e:

$$d(X, Y) = d(X, O) + d(O, Y) \iff d(X, Y) = -x + y = y - x = |y - x|.$$

Como em qualquer caso obtemos que $d(X, Y) = |x - y|$, segue o resultado. ■

Pela Proposição 2.3 temos que, se CD é um segmento do eixo E tal que C está à esquerda de D , então o ponto X pertence ao segmento CD se, e somente se, $c \leq x \leq d$, onde c , d e x são as coordenadas de C , D e X , respectivamente. Isto é, há uma correspondência biunívoca entre os pontos do segmento CD e os números reais do intervalo $[c, d]$: $CD \longleftrightarrow [c, d]$

Exemplo 2.4. Sejam X e Y pontos de coordenadas x e y no eixo E . Então, a coordenada do ponto médio M do segmento XY é $m = \frac{x+y}{2}$.

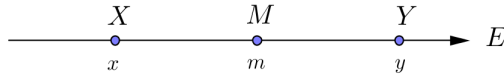


Figura 2.7: Ponto Médio do segmento XY

Solução: De fato, suponhamos que X está à esquerda de Y (caso em que Y está à esquerda de X se trata de forma análoga). Como o ponto médio M está entre X e Y , temos $x < m < y$. Logo:

$$\begin{aligned} d(M, X) = d(M, Y) &\iff |x - m| = |y - m| \\ &\iff m - x = y - m \\ &\iff 2m = x + y \\ &\iff m = \frac{x + y}{2} \end{aligned}$$

2.2 Distância entre pontos no plano

Sejam $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ pontos do plano Π dados pelas suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OX e OY dados. Seja $R = (c, b)$,

A distância de P a Q , que designamos $d(P, Q)$, é a hipotenusa PQ do triângulo retângulo ΔPQR de catetos PR e QR . Sendo a distância entre dois pontos de um eixo medida pelo módulo da diferença das suas coordenadas, as medidas desses catetos são, respectivamente, $|PR| = |a - c|$ e $|QR| = |b - d|$. Do teorema de pitágoras, obtemos:

$$d(P, Q) = |PQ| = \sqrt{|PR|^2 + |QR|^2} = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

Assim, a distância de $P = (a, b)$ a $Q = (c, d)$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes.

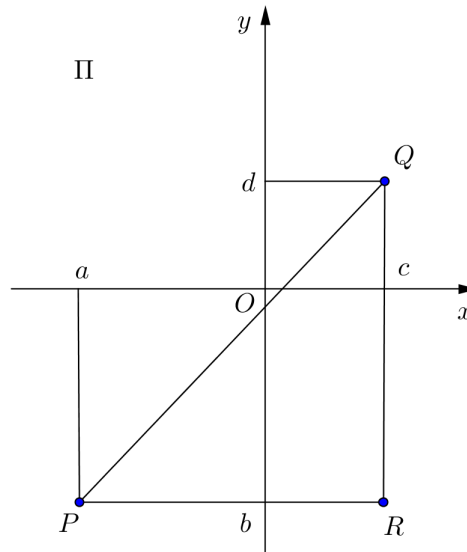


Figura 2.8: Triângulo Retângulo

Exemplo 2.5. Calcule a distância do ponto $A = (-1, 2)$ ao ponto $B = (2, -3)$.

Solução: Temos:

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

Definição 2.6. O círculo C de centro no ponto A pertencente a Π e raio $r > 0$ é o conjunto que consiste dos pontos do plano Π situados à distância r do ponto A , ou seja:

$$C = \{P \in \Pi \mid d(P, A) = r\}$$

Se $A = (a, b)$ num sistema de eixos ortogonais OX e OY no plano Π , $P = (x, y) \in C$

$$d(P, A) = r \iff d(P, A)^2 = r^2 \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Assim, associamos ao círculo C a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, que relaciona a abscissa com a ordenada de cada um de seus pontos. Propriedades geométricas do círculo são deduzidas por métodos algébricos estudando sua equação.

Exemplo 2.7. Determine o centro e o raio do círculo dado pela equação:

$$C : x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$$

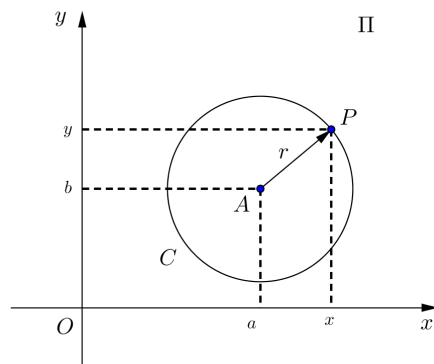


Figura 2.9: Círculo C de centro A

Solução: Completando quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 + 6y &= 0 \\ (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) &= 0 + 4 + 9 \\ (x - 2)^2 + (y + 3)^2 &= 13 \end{aligned}$$

Portanto, o círculo C tem centro no ponto $A(2, -3)$ e raio $r = \sqrt{13}$.

2.3 Vetores

2.3.1 Segmentos Orientados

Para iniciar a apresentação da presente seção, vamos assumir que todos os elementos considerados (pontos, retas, etc.), pertencem a um plano fixo.

Considere A e B pontos no plano. No segmento AB , o ponto A é chamado *origem* e o ponto B *extremidade*. Mesmo que os segmentos AB e BA representem o mesmo conjunto de pontos do plano (os pontos da reta que passam por A e B que estão entre A e B , incluindo A e B), a sua *orientação* (isto é, o sentido de percurso) é *contrária* (ou oposta, veja Figura 2.10).

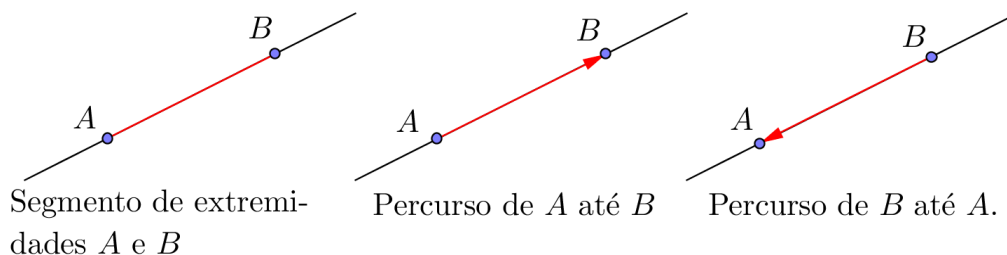


Figura 2.10: Segmentos Orientados

Devemos fixar e distinguir bem dois conceitos importantes: a **direção** e o **sentido** (ou **orientação**) de um segmento orientado. O conceito de direção tem apresentação mais objetiva do que o conceito de sentido.

Definição 2.8 (Direção). A **direção** de um segmento orientado é dada pela reta que o contém. Dizemos que dois segmentos **tem mesma direção** quando as retas que os contêm são paralelas (ou coincidentes).

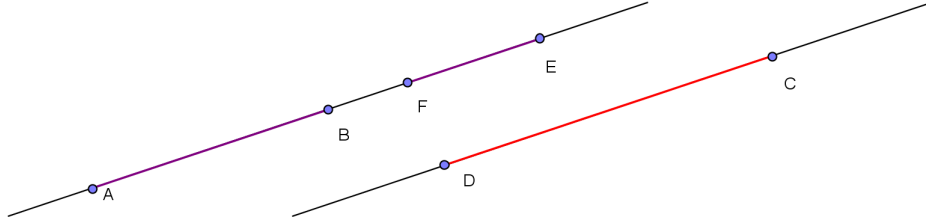


Figura 2.11: Mesma Direção

Na Figura 2.11, os segmentos AB e CD têm a mesma direção, pois as retas que os contêm são paralelas. Os segmentos AB e EF têm mesma direção porque as retas que os contêm são coincidentes, isto é, os pontos A , B , E e F são colineares.

Definição 2.9 (Sentido). Para entender o conceito de dois segmentos orientados terem o **mesmo sentido**, consideremos dois segmentos orientados AB e CD com a mesma direção e sejam r_{AB} , a reta determinada por A e B , e s_{CD} , a reta determinada por C e D . Desde que r_{AB} e s_{CD} são paralelas, analisemos separadamente dois casos.

a) Se r_{AB} paralela a s_{CD} e não coincidentes, dizemos que

- (i) AB e CD têm mesmo sentido quando os segmentos de retas AC e BC não têm ponto em comum.
- (ii) AB e CD possuem sentidos opostos (contrários) quando os segmentos de retas AC e BD possuem ponto em comum.

b) Se r_{AB} e s_{CD} coincidentes. Nesse caso considere E um ponto fora de r_{AB} e o segmentos EF com a mesma direção de AB .

- (i) Dizemos que AB e CD possuem o mesmo sentido quando CD e EF têm o mesmo sentido.
- (ii) Dizemos que AB e CD têm sentidos opostos quando CD e EF têm sentidos opostos.

Um terceiro conceito importante para o entendimento de um vetor é o comprimento.

Definição 2.10 (Módulo). O **módulo** ou **comprimento** de um segmento de reta orientado AB , é a distância do ponto A ao ponto B . Denotamos por $|AB|$ (ou por $d(AB)$).

Definição 2.11 (Segmentos Equipolentes). Dizemos que dois segmentos orientados são **equipolentes** quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo. Se os segmentos orientados AB e CD são equipolentes, escrevemos $AB \equiv CD$.

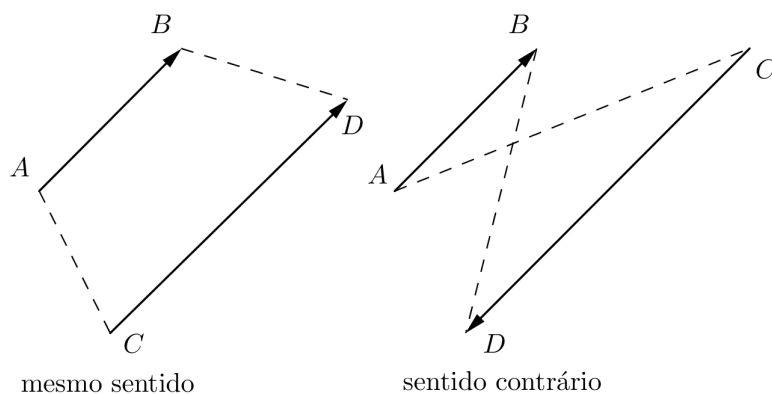


Figura 2.12: Sentidos

Convenções

Para evitar ambiguidades, faremos algumas convenções:

- Um segmento AB onde $A = B$ é chamado um segmento nulo. Os segmentos nulos têm módulo zero e não têm direção nem sentido.
- Se A é um ponto do plano, designamos por AA o segmento nulo de origem e extremidade A .
- Todos os segmentos nulos são considerados equipolentes.

Proposição 2.12. *Se AB é um segmento orientado e C é um ponto do plano, então existe apenas um segmento orientado com origem em C equipolente a AB .*

Demonstração. Devemos determinar um ponto D no plano de modo que

$$AB \equiv CD.$$

Isso significa que os segmentos AB e CD devem ter a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo. Denotemos por r a reta que passa por A e B , analisemos separadamente o que acontece quando C não pertence a reta r e quando C pertence a r . Estudaremos dois casos.

Caso 1: C não pertencente a r . Neste caso, existe apenas uma reta s paralela a r que passa pelo ponto C . Seja S o círculo de centro C e raio $|AB|$. A reta que passa por A e C divide o plano em dois semi-planos, um dos quais, que designamos P_B , contém o ponto B . O círculo S intersecta s em exatamente dois pontos diametralmente opostos, um dos quais, que chamamos D , está contido em P_B . Portanto, pela forma como foi obtido o ponto D , o segmento orientado CD é equipolente a AB .

Caso 2: C pertencente a r . Neste caso, o círculo de centro C e raio $|AB|$, intersecta a reta r em dois pontos diametralmente opostos. Mas, apenas um deles, que chamaremos D , é tal que AB e CD têm o mesmo sentido. Logo AB e CD são equipolentes, pois têm a mesma direção e os seus módulos são iguais. ■

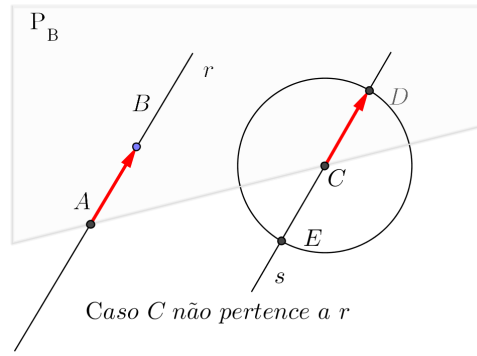


Figura 2.13: C não pertence a r

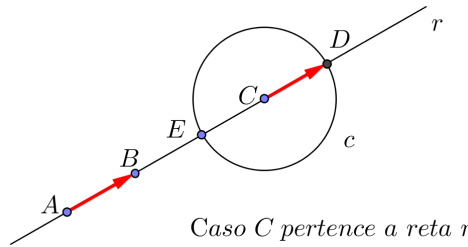


Figura 2.14: C pertence a r

2.3.2 Sistema de Coordenadas

Com o objetivo de associar cada segmento orientado a um par ordenado de números reais, precisamos da garantia de um resultado sobre *ponto médio* de segmento. Lembramos que o *ponto médio* de um segmento AB é o ponto M tal que $|AM| = |MB|$.

Proposição 2.13. *Os segmentos AB e CD são equipolentes se, e somente se, AD e BC possuem o mesmo ponto médio.*

Demonstração. Vamos separar a justificativa em dois caso possíveis:

Caso 1: A direção AB não coincidente com a direção de CD . Se $AB \equiv CD$ então os segmentos estão contidos em retas paralelas não coincidentes e, como têm o mesmo módulo e o mesmo sentido, o quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo e, as suas diagonais AD e BC , cortam-se mutuamente ao meio, ou seja, no ponto médio (ver Figura 2.15). Reciprocamente, se AD e BC têm o mesmo ponto médio então $ABDC$ é um paralelogramo. Logo AB e CD têm o mesmo sentido, o mesmo módulo e a mesma direção. Portanto $AB \equiv CD$.

Caso 2: A direção AB coincidente com a direção de CD . Considere r a reta que contém os pontos A, B, C e D provida de uma orientação e uma origem O escolhidas de modo que B esteja à direita de A (ver Figura 2.16) e sejam $a = |OA|$, $b = |OB|$, $c = |OC|$ e $d = |OD|$ (números chamados de coordenadas de A, B, C e D na reta r em relação a uma unidade escolhida).

Se $AB \equiv CD$, então AB e CD têm o mesmo sentido e $|AB| = |CD|$. Logo,

$$a < b \text{ e } c < d \quad \text{e} \quad b - a = d - c.$$

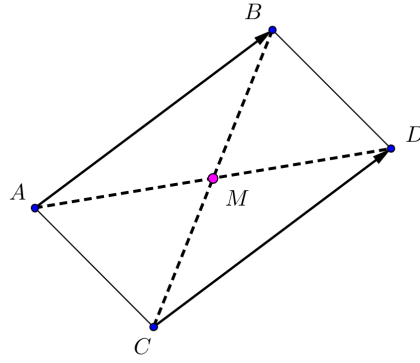


Figura 2.15: Paralelogramo ABCD

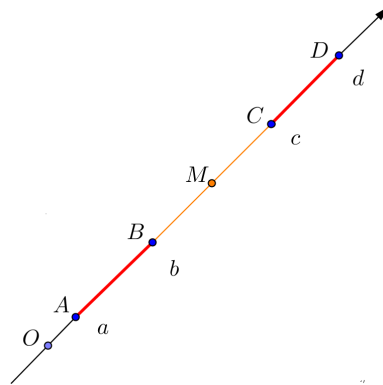


Figura 2.16: AB e CD com direções coincidentes

Assim,

$$b - a = d - c \iff a + d = b + c \iff \frac{a + d}{2} = \frac{b + c}{2}. \quad (2.1)$$

Agora observe que a coordenada do ponto médio de AD é $(a + d)/2$ e a de BC é $(b + c)/2$, que por (2.1) concluímos serem iguais. Portanto, AD e BC têm o mesmo ponto médio.

Reciprocamente, se AD e BC têm o mesmo ponto médio, então

$$\frac{a + d}{2} = \frac{b + c}{2}.$$

Assim,

$$a + d = b + c \iff b - a = d - c. \quad (2.2)$$

Dessa forma, $b - a$ e $d - c$ têm mesmo sinal e módulos iguais, o que significa que os segmentos colineares AB e CD têm o mesmo sentido e o mesmo comprimento $|AB| = |CD|$. Portanto $AB \equiv CD$. ■

Representação Cartesiana

Consideremos um plano do espaço e nele consideremos um ponto fixado O , que chamaremos de *Origem*, e duas retas perpendiculares entre si, inteceptando-se em O ,

sendo as retas consideradas com uma unidade de comprimento fixada. Essas retas são geralmente chamadas de *Eixos Coordenados* e são comumente consideradas uma horizontal e outra vertical (Ver Figura 2.17).

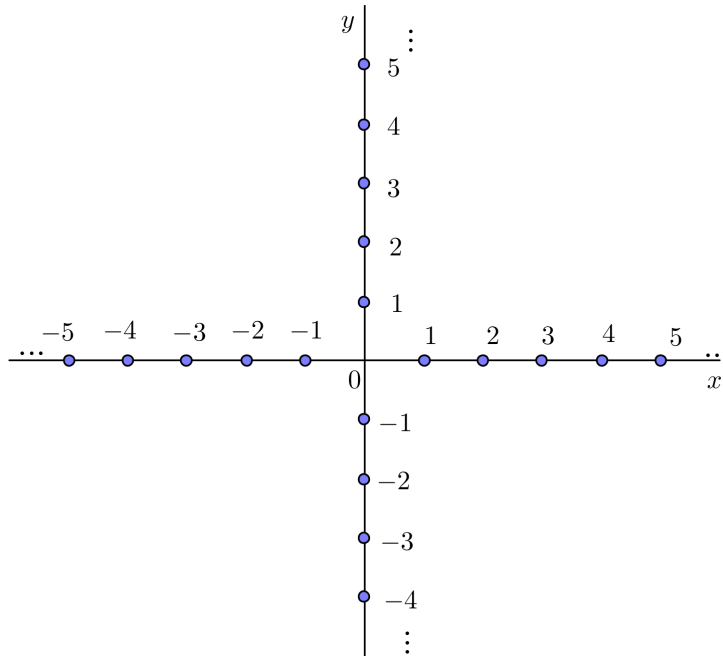


Figura 2.17: Eixos coordenados

Além disso, convencionou-se que:

- a reta horizontal é denominada “eixo coordenado x ”, orientada para a direita e sua coordenada é a primeira coordenada ou abscissa;
- a reta vertical é denominada “eixo coordenado y ”, orientada para cima e sua coordenada é a segunda coordenada ou ordenada.

No que se segue, faremos referência a essa configuração como *Sistema de Eixos Ortogonais Oxy* ou, brevemente, sistema *Oxy* . Uma vez escolhido um sistema de eixos *Oxy* num plano, o complementar dos eixos no plano consiste de quatro partes denominadas de quadrantes, conforme Figura 2.18.

A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite representar cada ponto do plano como um par ordenado de números reais e, de forma recíproca, cada par ordenado de números reais corresponde a um ponto do plano. De fato, dado um ponto P do plano, podemos traçar passando por P uma reta paralela ao eixo x e outra ao eixo y de forma que determinamos os pontos P_1 no eixo x e P_2 no eixo y (ver Figura 2.19).

Assim, temos números reais $p_1 = |OP_1|$ e $p_2 = |OP_2|$ de modo que, ao ponto P do plano, fazemos corresponder o par ordenado de números reais (x, y) .

Por outro lado, dado uma par de números reais (a, b) , determinamos o ponto Q_1 no eixo x e o ponto Q_2 no eixo y tais que $|OQ_1| = a$ e $|OQ_2| = b$. Assim, podemos determinar o ponto Q dado pela interseção da perpendicular ao eixo x que passa

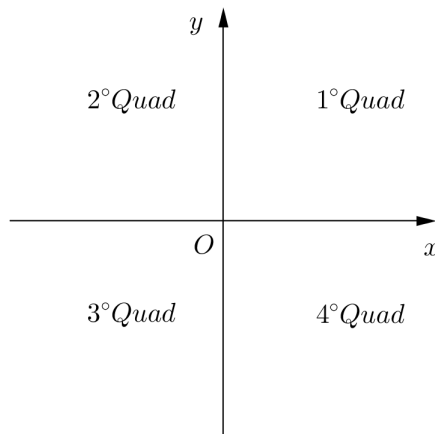


Figura 2.18: Quadrantes do Plano

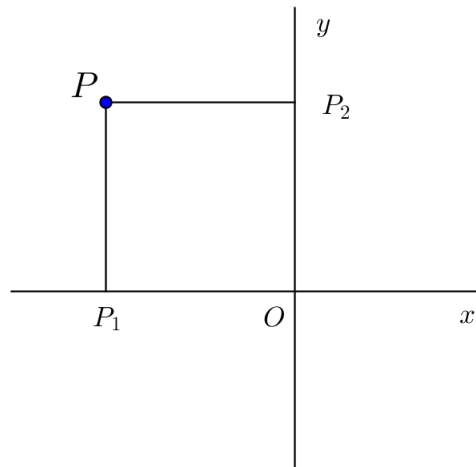


Figura 2.19: Ponto no Plano

pelo ponto de Q_1 , com a perpendicular ao eixo y que passa pelo ponto Q_2 . Portanto, ao par (a, b) , fazemos corresponder o ponto Q no plano.

Temos em síntese a conclusão que, feita a escolha de um sistema de eixos ortogonais, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais do conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b); a, b \text{ pertencem a } \mathbb{R}\}.$$

Na Figura 2.20 ilustramos alguns pontos do plano com suas coordenadas em relação ao sistema Oxy .

No que se segue, passaremos a considerar um sistema (ortogonal) de coordenadas cartesianas no plano com origem no ponto fixado O . Os pontos do plano são identificados por suas coordenadas.

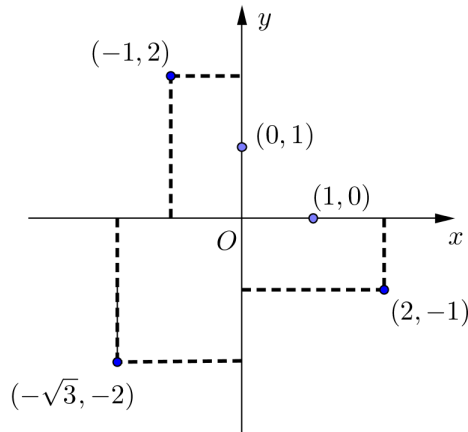


Figura 2.20: Ponto no Plano

Distância entre Pontos no Plano

Proposição 2.14. *Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$ pontos no plano cartesiano, então:*

$$AB \equiv CD \iff (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2)$$

Demonstração. Pela Proposição 2.13,

$$\begin{aligned} AB \equiv CD &\iff \text{ponto médio de } AD = \text{ponto médio de } BC \\ &\iff \left(\frac{a_1 + d_1}{2}, \frac{a_2 + d_2}{2} \right) = \left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2} \right) \\ &\iff (a_1 + d_1, a_2 + d_2) = (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\ &\iff a_1 + d_1 = b_1 + c_1 \text{ e } a_2 + d_2 = b_2 + c_2 \\ &\iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \text{ e } b_2 - a_2 = d_2 - c_2, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Propriedades

A relação de equipolência verifica as seguintes propriedades:

Reflexiva: Todo segmento orientado é equipolente a si próprio.

Simétrica: Se $AB \equiv CD$, então $CD \equiv AB$.

Observe que as propriedades Reflexiva e Simétrica são naturalmente verificadas pela definição de equipolência.

Transitiva: Se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, então $AB \equiv EF$.

Para verificar a propriedade Transitiva, considere os pontos do plano $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, $D = (d_1, d_2)$, $E = (e_1, e_2)$ e $F = (f_1, f_2)$, de modo que

$$AB \equiv CD \text{ e } CD \equiv EF,$$

ou seja, pela Proposição 2.14,

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) \text{ e } (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = (f_1 - e_1, f_2 - e_2).$$

Logo,

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (f_1 - e_1, f_2 - e_2)$$

e, portanto, $AB \equiv EF$.

Observação 2.15. *Essas propriedades permitem dividir o conjunto de todos os segmentos orientados do plano em subconjuntos, cada um dos quais consistindo de todos os segmentos orientados que são equipolentes entre si.*

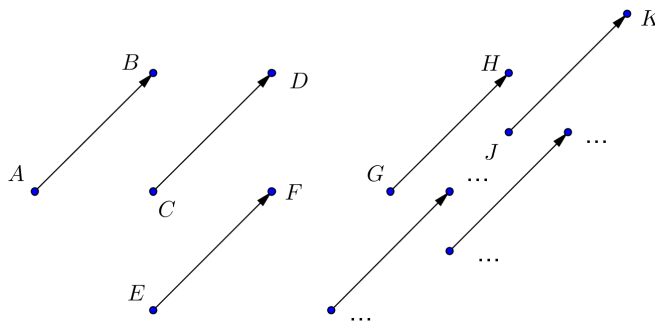


Figura 2.21: Segmentos Equipolentes

Definição 2.16 (Vetor no Plano). *Um vetor no plano é a coleção de todos os segmentos orientados equipolentes a um segmento orientado dado. Em outras palavras, se AB é um segmento orientado, o vetor designado por \overrightarrow{AB} é a coleção de todos os segmentos orientados equipolentes a AB . Qualquer segmento orientado equipolente a AB é chamado um representante do vetor \overrightarrow{AB} .*

Observação 2.17. *Note que a definição nos diz que $AB \equiv CD$ se, e somente se, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

Você deve estar achando um pouco estranha a definição de vetor, e provavelmente está perguntando a si mesmo: como desenhar um vetor no plano? Na verdade, o que desenhamos são apenas os representantes dos vetores, isto é, segmentos orientados.

Notação 2.18. *Os vetores são também escritos usando letras minúsculas com uma flecha, como \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , etc. Por exemplo, se A e B são pontos do plano, podemos denotar o vetor \overrightarrow{AB} por \vec{u} , ou seja, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.*

Vejamos agora como representar os vetores em termos de coordenadas de um sistema cartesiano dado.

Definição 2.19 (Coordenadas de um vetor). *Sejam $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ pontos do plano e $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Dizemos que $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ são as coordenadas do vetor \vec{u} , e escrevemos:*

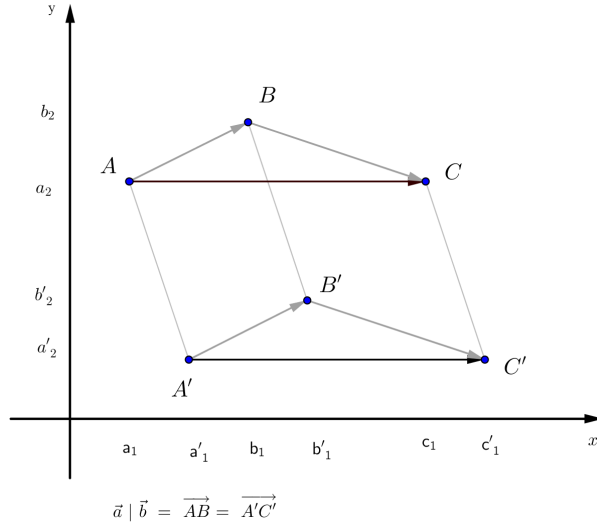


Figura 2.22: Segmento Orientado

$$\vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

Observação 2.20. As coordenadas de um vetor \vec{u} não dependem do segmento escolhido para representá-lo e são as coordenadas do único ponto P tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$.

De fato, se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$ e

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad e \quad \vec{u} = \overrightarrow{CD},$$

então $AB \equiv CD$. Sendo $AB \equiv CD$, temos pela Proposição 2.14 que:

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2),$$

ou seja, as coordenadas de \vec{u} são sempre as mesmas, independente dos representantes. Agora, observe que se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ então podemos considerar o ponto $P = (x, y)$ com as coordenadas $x = b_1 - a_1$ e $y = b_2 - a_2$, de modo que

$$(x - 0, y - 0) = (x, y) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

Assim, pela Proposição 2.14 garantimos $OP \equiv AB$. Portanto, $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$.

Exemplo 2.21. Sejam os pontos $A = (0, 1)$, $B = (1, -\frac{1}{2})$ e $C = (-1, 1)$. As coordenadas do vetor \overrightarrow{AB} , são:

$$\overrightarrow{AB} = \left(1 - 0, -\frac{1}{2} - 1\right) = \left(1, -\frac{3}{2}\right).$$

Desejamos agora encontrar $D = (d_1, d_2)$, tal que $CD \equiv AB$, ou seja, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Assim devemos ter:

$$(d_1 - (-1), d_2 - 1) = \left(1, -\frac{3}{2}\right).$$

Portanto, $d_1 = 0$, $d_2 = -\frac{1}{2}$ e $D = (0, -\frac{1}{2})$. Além disso, como vimos na observação anterior, $P = (1, -\frac{3}{2})$, pois P e \overrightarrow{AB} têm coordenadas iguais.

Observação 2.22. Dados um vetor \vec{u} e um ponto A , existe um único ponto B , tal que o segmento AB representa o vetor \vec{u} . Isto é, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Exemplo 2.23. Sejam $A = (1, 2)$, $B = (3, 1)$ e $C = (4, 0)$. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e as coordenadas do ponto D tal que $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$.

Solução: Temos $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3 - 1, 1 - 2) = (2, -1)$. Agora, se $D = (d_1, d_2)$ então, pela Proposição 2.14:

$$\begin{aligned}\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} &\iff AB \equiv CD \\ &\iff (2, -1) = (d_1 - 4, d_2 - 0) \\ &\iff 2 = d_1 - 4 \text{ e } -1 = d_2 - 0 \\ &\iff d_1 = 2 + 4 = 6 \text{ e } d_2 = -1 + 0 = -1.\end{aligned}$$

Portanto, $D = (6, -1)$.

Soma de Vetores

Sabendo que por cada ponto do plano é possível traçar um segmento orientado que representa um vetor, veremos agora como se efetua a *operação de adição de vetores no plano*.

Definição 2.24 (Soma de vetores). Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores no plano, A um ponto qualquer do plano, \overrightarrow{AB} o representante de \vec{u} com origem no ponto A e \overrightarrow{BC} o representante de \vec{v} com origem no ponto B . O vetor soma de $\vec{u} + \vec{v}$, é o vetor representado pelo segmento orientado \overrightarrow{AC} :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

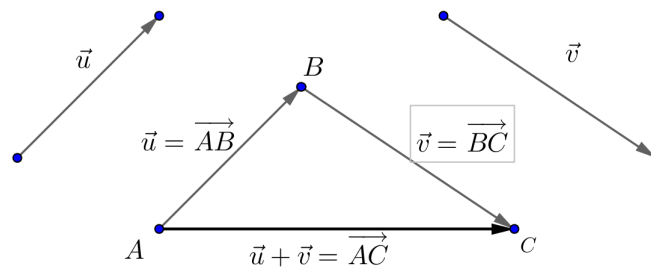


Figura 2.23: Soma de Vetores

Na (Figura 2.23), mostramos a soma $\vec{u} + \vec{v}$ dos vetores \vec{u} e \vec{v} , representada pelo segmento orientado \overrightarrow{AC} . No entanto, observe que a definição do vetor soma

$$\vec{u} + \vec{v}$$

depende da escolha do ponto A . Para verificarmos que o vetor soma está bem definido, devemos demonstrar que ele independe dessa escolha. Sejam A' outro ponto do plano e B' determinado pela Proposição 2.12 tal que

$$\vec{u} = \overrightarrow{A'B'}$$

e seja C' o ponto determinado, de modo que $\vec{v} = \overrightarrow{B'C'}$. Devemos demonstrar que

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{A'C'},$$

ou seja, que $AC \equiv A'C'$. Para tanto, considere agora um sistema de coordenadas cartesianas com origem no ponto O e suponha que os pontos A , B , C , A' , B' , e C' possuem coordenadas:

$$\begin{aligned} A &= (a_1, a_2), & A' &= (a'_1, a'_2), & B &= (b_1, b_2), & B' &= (b'_1, b'_2), \\ C &= (c_1, c_2) & \text{e} & & C' &= (c'_1, c'_2). \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \iff AB \equiv A'B' \iff \begin{cases} b_1 - a_1 = b'_1 - a'_1 \\ b_2 - a_2 = b'_2 - a'_2 \end{cases}$$

e

$$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} \iff BC \equiv B'C' \iff \begin{cases} c_1 - b_1 = c'_1 - b'_1 \\ c_2 - b_2 = c'_2 - b'_2. \end{cases}$$

Logo,

$$(c_1 - b_1) + (b_1 - a_1) = (c'_1 - b'_1) + (b'_1 - a'_1),$$

e

$$(c_2 - b_2) + (b_2 - a_2) = (c'_2 - b'_2) + (b'_2 - a'_2),$$

isto é,

$$c_1 - a_1 = c'_1 - a'_1 \quad \text{e} \quad c_2 - a_2 = c'_2 - a'_2,$$

e, portanto, $AC \equiv A'C'$. Com isso provamos que o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ está bem definido, pois depende apenas de \vec{u} e \vec{v} , e não da escolha do ponto A .

Coordenadas do Vetor Soma

Aproveitando o raciocínio que mostra a boa definição da soma de vetores, temos que se

$$\vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \quad \text{e} \quad \vec{v} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2),$$

então

$$\vec{u} + \vec{v} = (b_1 - a_1 + c_1 - b_1, b_2 - a_2 + c_2 - b_2).$$

Escrevendo $x_1 = (b_1 - a_1)$, $y_1 = (b_2 - a_2)$, $x_2 = (c_1 - b_1)$ e $y_2 = (c_2 - b_2)$, temos

$$\vec{u} = (x_1, y_1) \quad \text{e} \quad \vec{v} = (x_2, y_2),$$

e simplesmente

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).}$$

Exemplo 2.25. Sejam $A = (-1, 0)$, $B = (2, -1)$ e $C = (1, 2)$. Determinemos

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

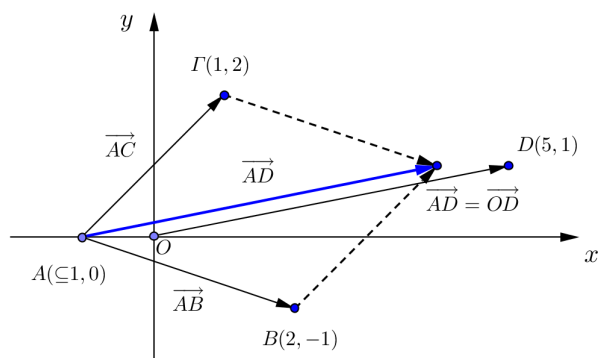


Figura 2.24: Soma de Vetores em Coordenadas

Solução: Temos:

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (1), -1 - 0) = (1, -1) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = (1 - (1), 2 - 0) = (0, 2).$$

Logo,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (1, -1) + (0, 2) = (1, 1).$$

Ainda neste exemplo podemos determinar o representante do vetor soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ com origem no ponto A é o segmento orientado AD, onde $D = (d_1, d_2)$ é o ponto, tal que $AC \equiv BD$. Então, $d_1 - 1 = 0 - 1$ e $d_2 - (-1) = 2 - 0$, isto é, $D = (d_1, d_2) = (1, 1)$.

Observação 2.26. Sejam A, B e C pontos não colineares no plano. Um ponto D faz do quadrilátero ABCD um paralelogramo se, e somente se,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

De fato, se ABCD é um paralelogramo, então $AC \equiv BD$. Logo,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

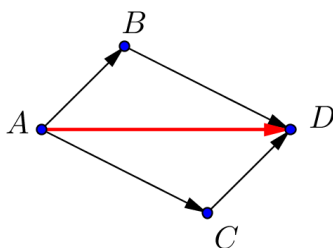


Figura 2.25: Paralelogramo

Reciprocamente, se $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, então, pela definição de vetores, o ponto D é a extremidade do representante de \overrightarrow{AC} com origem no ponto B. Isto é, $AC \equiv BD$ e portanto ABCD é um paralelogramo.

Propriedades da adição de vetores

1. Propriedade comutativa:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

Com efeito, se $\vec{u} = (a_1, a_2)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2)$, então

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) = \vec{v} + \vec{u}.$$

2. O *vetor nulo*, que designamos por $\vec{0}$, é o vetor representado por qualquer segmento nulo. As coordenadas do vetor nulo são:

$$\vec{0} = \overrightarrow{BB} = (b_1 - b_1, b_2 - b_2) = (0, 0),$$

onde $B = (b_1, b_2)$ é um ponto qualquer do plano. Se \vec{u} é um vetor qualquer, temos

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}.$$

De fato, se $\vec{u} = (a_1, a_2)$, então

$$\vec{u} + \vec{0} = (a_1 + 0, a_2 + 0) = (a_1, a_2) = \vec{u}.$$

3. Dado um vetor \vec{u} existe um vetor que designamos por $-\vec{u}$ e chamamos o *simétrico* de \vec{u} , tal que

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

De fato, se AB é um segmento orientado que representa o vetor \vec{u} , então o segmento orientado BA é um representante do vetor $-\vec{u}$, pois pela definição da soma de vetores vemos que:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

Observe também que, se $\vec{u} = (a_1, a_2)$, então as coordenadas de $-\vec{u}$ são:

$$-\vec{u} = (-a_1, -a_2)$$

4. A soma de vetores é *associativa*. Isto é, dados três vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} :

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Com efeito, sejam $\vec{u} = (a_1, a_2)$, $\vec{v} = (b_1, b_2)$ e $\vec{w} = (c_1, c_2)$. Usando a propriedade associativa da adição de números reais, temos:

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) = ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2) \\ &= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)) = (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\ &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}). \end{aligned}$$

Desta maneira, vemos que a operação de soma de vetores, possui propriedades análogas das operação de soma de números reais.

Definiremos agora uma operação de multiplicação de um número real por um vetor.

Convenção: No que segue, os números reais serão chamados também *escalares*.

Definição 2.27 (Multiplicação de escalares por vetores). *Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos o produto de λ por \vec{u} como sendo o vetor determinado pelo segmento AB' , e representamos por $\lambda\vec{u} = \lambda\overrightarrow{AB}$, de modo que:*

- (i) A, B e B' são colineares,
- (ii) $|AB'| = |\lambda|d(A, B) = |\lambda||AB|$,
- (iii) AB e AB' tem

$$\begin{cases} \text{mesmo sentido,} & \text{se } \lambda > 0 \\ \text{sentidos opostos,} & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

Na Figura 2.26 mostramos vetores da forma $\lambda\vec{a}$, com $\lambda = 1, -1, -1/2, 1/2, 3/2$.

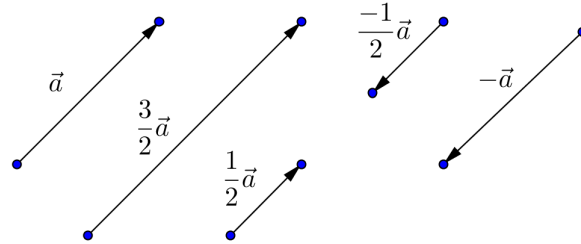


Figura 2.26: Múltiplos de um Vetor

Observação 2.28. *Observe que, considerando $\lambda = 0$ no item (ii) da definição 2.27 temos que $d(A, B') = 0 \cdot d(A, B) = 0$, isto é, $B' = A$ e, portanto,*

$$0\vec{u} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Similarmente, se $\vec{u} = \vec{0}$, podemos verificar a partir da definição, que $\lambda\vec{0} = \vec{0}$, qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.29. *A multiplicação do escalar λ pelo vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ não depende do segmento representante AB .*

Demonstração. Devemos mostrar que se $CD \equiv AB$, então $\overrightarrow{CD'} = \lambda\overrightarrow{CD}$ coincide com $\overrightarrow{AB'}$, isto é, que $AB' \equiv CD'$. Como $CD \equiv AB$, temos que CD e AB têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo. Logo,

$$|CD'| = |\lambda||CD| = |\lambda||AB| = |AB'|.$$

Vamos dividir em dois casos.

Caso 1: Se $\lambda > 0$. Neste caso, AB' tem a mesma direção e sentido que AB e CD' tem a mesma direção e sentido que CD . Portanto, AB' e CD' têm também a mesma direção e sentido.

Caso 2: Se $\lambda < 0$. Neste caso, AB' e AB têm a mesma direção e sentidos contrários. O mesmo acontece com CD e CD' . Como AB e CD têm o mesmo sentido, concluímos que AB' e CD' têm a mesma direção e o mesmo sentido.

Portanto, seja λ positivo ou negativo, obtemos $CD' \equiv AB'$, como queríamos. ■

Proposição 2.30. Se $\vec{u} = (a_1, a_2)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, é um escalar não nulo, então:

$$\lambda \vec{u} = \lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$$

Demonstração. Sejam $P = (a_1, a_2)$ e $Q = (\lambda a_1, \lambda a_2)$ pontos do plano. Devemos demonstrar que $\lambda \vec{OP} = \vec{OQ}$. Isto significa que:

- (i) O , P e Q são pontos colineares;
- (ii) $|OQ| = |\lambda||OP|$;
- (iii) OQ têm o mesmo sentido que OP quando $\lambda > 0$ e sentido oposto quando $\lambda < 0$.

De fato, se $a_1 = 0$, então O , P e Q estão sobre o eixo Y . Se $a_1 \neq 0$, então a reta que passa por O e Q tem inclinação

$$\frac{\lambda a_2}{\lambda a_1} = \frac{a_2}{a_1},$$

que é igual à inclinação da reta que passa por O e P . Logo, O , P e Q são colineares. Observe também que

$$|OQ| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2} = \sqrt{\lambda^2(a_1^2 + a_2^2)} = |\lambda|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\lambda||OP|.$$

Resta mostrar que OP e OQ têm o mesmo sentido quando $\lambda > 0$ e sentidos opostos quando $\lambda < 0$. Para isso, é necessário analisar os seguintes casos: $a_1 > 0$ e $a_2 = 0$; $a_1 < 0$ e $a_2 = 0$; $a_1 = 0$ e $a_2 > 0$; $a_1 = 0$ e $a_2 < 0$; $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$; $a_1 < 0$ e $a_2 > 0$; $a_1 < 0$ e $a_2 < 0$; $a_1 > 0$ e $a_2 < 0$. Vamos analisar, por exemplo, o caso $\lambda > 0$, $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$.

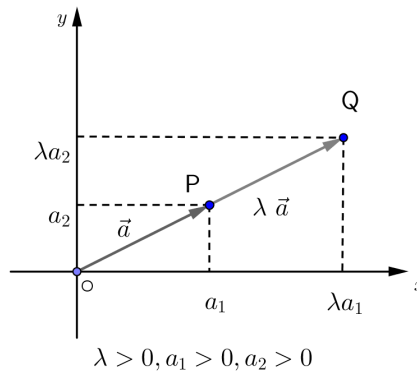


Figura 2.27: Vetores com Mesmo Sentido

Neste caso, os pontos $P = (a_1, a_2)$ e $Q = (\lambda a_1, \lambda a_2)$ estão no primeiro quadrante do plano. Logo P e Q estão no mesmo semi plano determinado pela perpendicular à reta que passa por O , P e Q . Isto é, OP e OQ têm o mesmo sentido. ■

Exemplo 2.31. Sejam $A = (0, 1)$ e $B = (1, 0)$. Determinemos os representantes CD , CD' e CD'' dos vetores \overrightarrow{AB} , $-2\overrightarrow{AB}$ e $2\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto $C = (1, 1)$.

Solução: Temos que $\overrightarrow{AB} = (1 - 0, 0 - 1) = -2\overrightarrow{AB} = (-2 \cdot 1, -2 \cdot (-1)) = (-2, 2)$, $2\overrightarrow{AB} = (2 \cdot 1, 2 \cdot (-1)) = (2, 2)$, e $C = (1, 1)$. E os pontos buscados $D = (d_1, d_2)$, $D' = (d'_1, d'_2)$, devem satisfazer as seguintes relações:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d_1 - 1 = 1 \\ d_2 - 1 = -1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{CD'} = -2\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d'_1 - 1 = -2 \\ d'_2 - 1 = 2 \end{cases}$$

e

$$\overrightarrow{CD''} = 2\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d''_1 - 1 = 2 \\ d''_2 - 1 = -2 \end{cases}$$

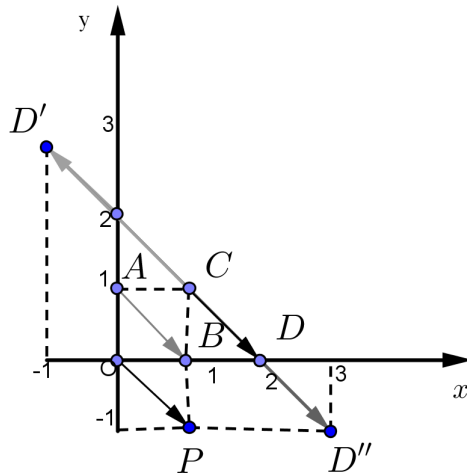


Figura 2.28: Segmentos Orientados

Na Figura (2.28) ilustramos os segmentos orientados AB , CD , CD' e CD'' , assim como o segmento OP representante na origem do vetor \overrightarrow{AB} .

Propriedades da multiplicação de escalar por vetores

Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{t} vetores do plano e sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. A multiplicação de escalares por vetores é *associativa*. Isto é,

$$\lambda (\mu \vec{u}) = (\lambda \cdot \mu) \vec{u}$$

De fato, se $\vec{u} = (a_1, a_2)$, com respeito a um sistema de coordenadas no plano, temos:

$$\begin{aligned}\lambda(\mu\vec{u}) &= \lambda(\mu a_1, \mu a_2) \\ &= (\lambda(\mu a_1), \mu(\lambda a_2)) \\ &= ((\lambda\mu)a_1, (\lambda\mu)a_2) \\ &= (\lambda\mu)\vec{u}.\end{aligned}$$

2. A multiplicação de escalares por vetores satisfaz as *propriedades distributivas*:

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{u} + \vec{v}) &= \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} \\ (\lambda + \mu)\vec{u} &= \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}\end{aligned}$$

A primeira destas propriedades, se verifica da seguinte maneira: se $\vec{u} = (a_1, a_2)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2)$, então:

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{u} + \vec{v}) &= \lambda(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (\lambda(a_1 + b_1), \lambda(a_2 + b_2)) \\ &= (\lambda a_1 + \lambda b_1, \lambda a_2 + \lambda b_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2) + (\lambda b_1, \lambda b_2) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}.\end{aligned}$$

3. O número $1 \in \mathbb{R}$ é o elemento neutro da multiplicação de escalares por vetores:

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

De fato, se $\vec{u} = (a_1, a_2)$, então $1 \cdot \vec{u} = (1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2) = (a_1, a_2)$.

Exemplo 2.32. Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (3, 1)$, determine:

$$\vec{p} = 2\vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{q} = \vec{u} + 2\vec{v}; \quad e \quad \vec{s} = \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{u}$$

.

Solução: Temos,

$$\begin{aligned}\vec{p} = 2\vec{u} + \vec{v} &= 2(1, -1) + (3, 1) = (2(1), 2(-1)) + (3, 1) \\ &= (2, -2) + (3, 1) = (2 + 3, -2 + 1) \\ &= (5, -1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{q} = \vec{u} + 2\vec{v} &= (1, -1) + 2(3, 1) = (1, -1) + (2(3), 2(1)) \\ &= (1, -1) + (6, 2) = (1 + 6, -1 + 2) \\ &= (7, 1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{q} - \vec{p} &= \frac{1}{2}(7, 1) - (5, -1) = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) - (5, -1) \\ &= \left(\frac{7}{2} - 5, \frac{1}{2} - (-1)\right) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

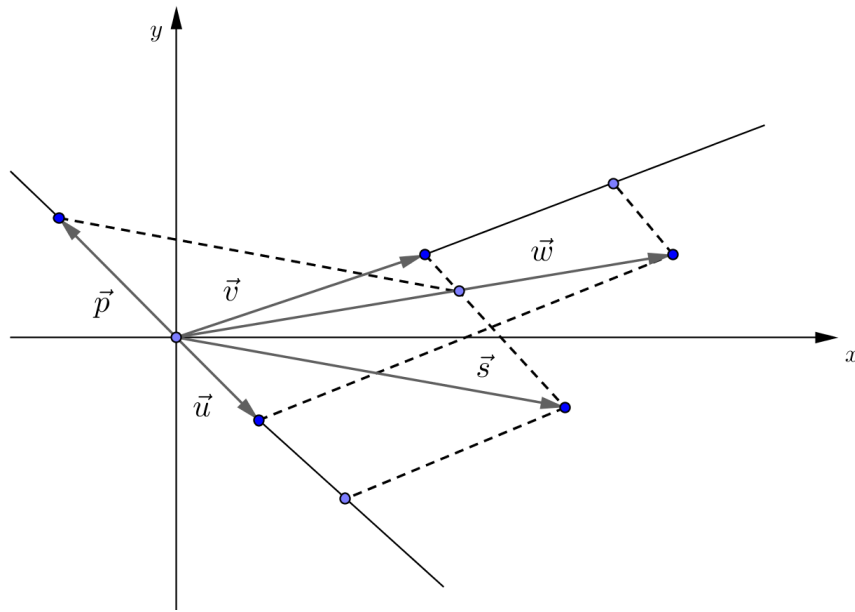


Figura 2.29: Multiplicação de Escalares por Vetores

Translações de Eixos

Alguns problemas podem ser simplificados por meio da translação de eixos, obtendo novos eixos paralelos aos originais. Pode-se observar na figura a seguir que os eixos de um sistema de coordenadas xy foi transladado para obter um sistema de coordenadas $x'y'$, cuja origem O' está no ponto $(x, y) = (k, l)$. Um ponto P no espaço bidimensional tem agora tanto coordenadas (x, y) quanto coordenadas (x', y') . Para ver como as duas coordenadas estão relacionadas, considere o vetor $\vec{O'P}$. No sistema xy , seu ponto inicial está em (k, l) e seu ponto final está em (x, y) , de modo que $\vec{O'P} = (x - k, y - l)$. No sistema $x'y'$ seu ponto inicial está em $(0, 0)$ e seu ponto final em (x', y') , de modo que $\vec{O'P} = (x', y')$, e portanto

$$x' = x - k \quad \text{e} \quad y' = y - l$$

Estas fórmulas são chamadas equações de translação

Exemplo 2.33. Suponha que um sistema de coordenadas xy é transladado para um sistema de coordenadas $x'y'$ cuja origem tem coordenadas xy dadas por $(k, l) = (4, 1)$.

- (a) Encontre as coordenadas $x'y'$ do ponto com coordenadas xy dadas por $P(2, 0)$.
- (b) Encontre as coordenadas xy do ponto com coordenadas $x'y'$ dadas por $Q(-1, 5)$.

Solução: (a) As equações de translação são $x' = x - 4$, $y' = y - 1$ e portanto as coordenadas $x'y'$ de $P(2, 0)$ são $x = 2 - 4 = -2$ e $y' = 0 - 1 = -1$.

(b) As equações de translação em (a) podem ser escritas como $x = x' + 4$, $y = y' + 1$ e portanto as coordenadas xy de Q são $x = -1 + 4 = 3$ e $y = 5 + 1 = 6$.

Definição 2.34. Dizemos que um vetor \vec{w} é uma combinação linear dos vetores v_1, v_2, \dots, v_r se \vec{w} pode ser escrito na forma

$$\vec{w} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r$$

onde k_1, k_2, \dots, k_r são escalares.

Observação 2.35. Se $r = 1$, então a equação desta definição reduz a $\vec{w} = k_1 v_1$; ou seja, \vec{w} é uma combinação linear de um único vetor v_1 se for um múltiplo escalar de v_1 .

Exemplo 2.36 (Os vetores em \mathbb{R}^2 são combinações lineares de \vec{i} e \vec{j}). Cada vetor $\vec{v} = (a, b)$ em \mathbb{R}^2 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base canônica,

$$\vec{i} = (1, 0), \quad \vec{j} = (0, 1)$$

pois

$$\vec{v} = a(1, 0) + b(0, 1) = a\vec{i} + b\vec{j}$$

Exemplo 2.37 (Conferindo uma combinação linear). Considere os vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (6, 4)$ em \mathbb{R}^2 . Mostre que $\vec{w} = (9, 2)$ é uma combinação linear de \vec{u} e \vec{v} e que $\vec{v} = (4, -1)$ não é uma combinação linear dos vetores $\vec{p} = (2, -4)$ e $\vec{q} = (-1, 2)$.

Solução: Para \vec{w} ser uma combinação linear deve haver um escalares k_1 e k_2 tais que $\vec{w} = k_1 \vec{u} + k_2 \vec{v}$, ou seja,

$$(9, 2) = (k_1(1, 2) + k_2(6, 4))$$

ou

$$(9, 2) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2)$$

Igualando os componentes correspondentes dá

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 9 \\ 2k_1 + 4k_2 &= 2 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema encontramos $k_1 = -3$ e $k_2 = 2$, e portanto,

$$\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$$

Analogamente, para \vec{v} ser uma combinação linear de \vec{p} e \vec{q} deve haver escalares k_1 e k_2 tais que $\vec{v} = k_1 \vec{p} + k_2 \vec{q}$; ou seja

$$(4, -1) = k_1(2, -4) + k_2(-1, 2)$$

ou

$$(4, -1) = (2k_1 - k_2, -4k_1 + 2k_2).$$

Igualando os componentes correspondentes dá

$$\begin{aligned} 2k_1 - k_2 &= 4 \\ -4k_1 + 2k_2 &= -1 \end{aligned}$$

Este sistema de equações é inconsistente, de modo que não há tais escalares k_1 e k_2 . Consequentemente, \vec{v} não é uma combinação linear de \vec{p} e \vec{q} .

Definição 2.38. Se $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é um conjunto não vazio de vetores, então a equação vetorial

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = 0$$

tem pelo menos uma solução, a saber

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0.$$

Se essa é a única solução, então o conjunto S é chamado **linearmente independente**. Se existem outras soluções, então S é um conjunto **linearmente dependente**.

Exemplo 2.39 (Um Conjunto Linearmente Dependente). Se $\vec{v}_1 = (2, -1)$ e $\vec{v}_2 = (6, -3)$, então o conjunto de vetores $S = \{v_1, v_2\}$ é linearmente dependente, pois $3v_1 - v_2 = 0$.

Exemplo 2.40 (Conjuntos Linearmente Independentes). Considere os vetores $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$ em \mathbb{R}^2 . Em termos de componentes, a equação vetorial

$$k_1 \vec{i} + k_2 \vec{j} = 0$$

é dada por

$$k_1(1, 0) + k_2(0, 1) = (0, 0)$$

ou, equivalentemente, por

$$(k_1, k_2) = (0, 0)$$

Isto implica que $k_1 = 0$ e $k_2 = 0$, de modo que o conjunto $S = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ é linearmente independente.

Exemplo 2.41 (Determinando Independência ou Dependência Linear). Determine se os vetores

$$\vec{v}_1 = (1, -2) \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = (-3, 6)$$

formam um conjunto linearmente dependente ou independente.

Solução: Em termos de componentes, a equação vetorial

$$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 = 0$$

é dada por

$$k_1(1, -2) + k_2(-3, 6) = (0, 0)$$

ou, equivalentemente, por

$$(k_1 - 3k_2, -2k_1 + 6k_2) = (0, 0)$$

Igualando os componentes correspondentes, dá

$$\begin{aligned} k_1 - 3k_2 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 &= 0 \end{aligned}$$

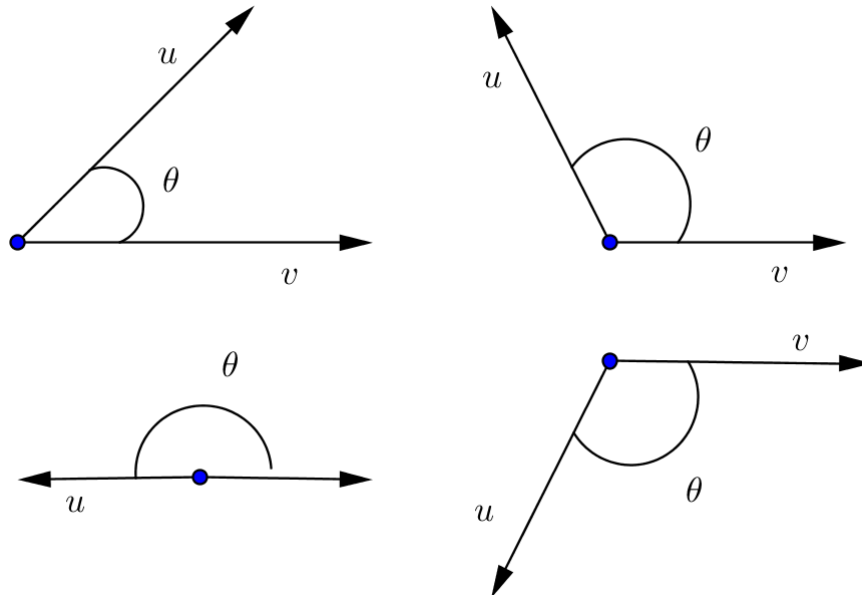
Assim, os vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 formam um conjunto linearmente dependente se este sistema tiver uma solução não trivial, ou um conjunto linearmente independente se tiver somente a solução trivial. Resolvendo o sistema, obtemos

$$k_1 = t \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{t}{3},$$

onde t é um parâmetro real. Assim, o sistema tem soluções não triviais \vec{v}_1 e \vec{v}_2 formam um conjunto linearmente dependente. Alternativamente, nós poderíamos mostrar a existência de soluções não triviais sem resolver o sistema, mostrando que a matriz dos coeficientes tem determinante zero e consequentemente é não invertível.

Norma e Produto Escalar de Vetores

Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores não nulos no espaço bidimensional e suponha que estes vetores foram posicionados de tal modo que seus pontos iniciais coincidem. Pelo ângulo entre \vec{u} e \vec{v} nós entendemos o ângulo θ determinado por \vec{u} e \vec{v} que satisfaz $0 < \theta < \pi$.



Definição 2.42 (Norma de um vetor). *A norma de um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é definida como o comprimento do vetor, ou seja, a distância de \vec{u} até à origem do sistema coordenadas que representamos por:*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}.$$

Exemplo 2.43. *A norma do vetor $\vec{u} = (1, 3)$ é*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Definição 2.44 (Produto Escalar). *Se \vec{u} e \vec{v} são vetores no plano e θ é o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} , então o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$, ou produto interno euclidiano, é definido por*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta & \text{se } \vec{u} \neq 0 \text{ e } \vec{v} \neq 0 \\ 0 & \text{se } \vec{u} = 0 \text{ ou } \vec{v} = 0. \end{cases}$$

Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dois vetores não-nulos. Se o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} é θ , então a lei dos cossenos nos garante que

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta. \quad (2.3)$$

Agora, podemos reescrever (2.3) como

$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$$

ou

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2).$$

Substituindo

$$\|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2, \quad \|\vec{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2$$

e

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2$$

e simplificando, obtemos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Observação 2.45 (Ângulo entre Vetores). *No caso de dois vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} , podemos determinar a medida do ângulo formado por estes dois vetores da seguinte forma:*

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|},$$

devendo $0 \leq \theta < \pi$.

2.4 Transformações lineares

Definição 2.46. Dizemos que uma função $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação Linear quando

$$T(x, y) = (ax + cy, bx + dy),$$

onde a, b, c e d são números reais.

Exemplo 2.47. A função $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (x, 2x - y),$$

é uma transformação linear, onde $a = 1$, $c = 0$, $b = 2$ e $d = -1$.

Podemos estudar as transformações lineares do plano usando também a forma matricial. Considere $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação Linear. Então, por definição

$$T(x, y) = (ax + cy, bx + dy),$$

onde a, b, c e d são números reais. Escrevendo o vetor (x, y) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

podemos escrever

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.48. A transformação linear do Exemplo 2.47 pode ser estudado como $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

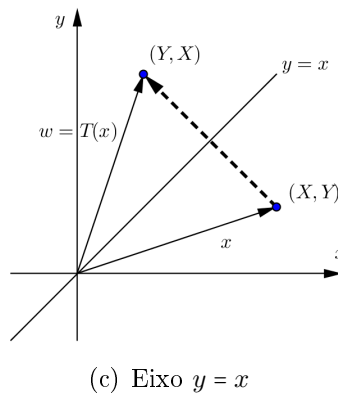
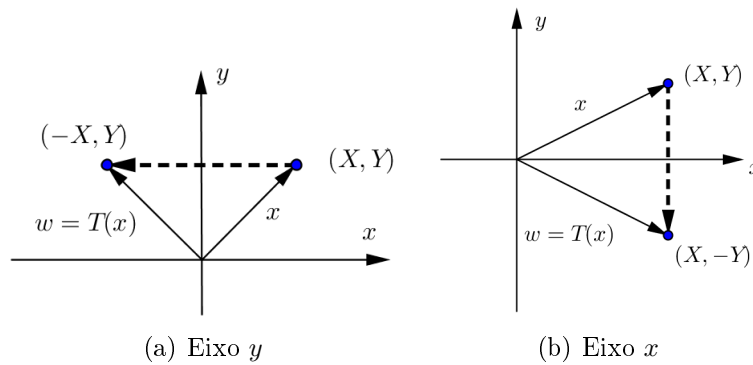
$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Geometria das transformações lineares

Definição 2.49 (Reflexões). A transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que aplica cada vetor na sua imagem simétrica em relação ao eixo y é chamada de **reflexão com respeito ao eixo y** .

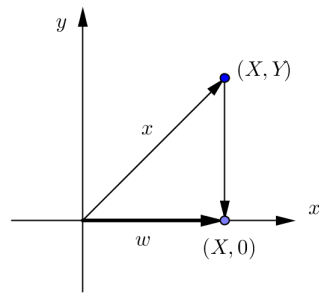
Abaixo exemplificamos outros tipos de reflexões.

Transformação	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Reflexão em torno do eixo y	eixo y	$w_1 = -x, \quad w_2 = y$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexão em torno do eixo x	eixo x	$w_1 = x, \quad w_2 = -y$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexão em torno da reta $y = x$	reta $y = x$	$w_1 = y, \quad w_2 = x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

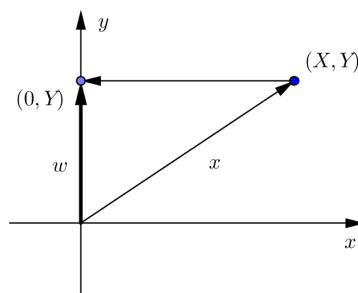


Definição 2.50 (Projeções). A transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que leva cada vetor na sua projeção ortogonal sobre o eixo x é chamada de **projeção ortogonal sobre o eixo x** . Analogamente, a transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que leva cada vetor na sua projeção ortogonal sobre o eixo y é chamada de **projeção ortogonal sobre o eixo y** .

Transformação	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Projeção ortogonal sobre o eixo x	eixo x	$w_1 = x, \quad w_2 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o eixo y	eixo y	$w_1 = 0, \quad w_2 = y$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



(d) Eixo x



(e) Eixo y

Definição 2.51 (Rotações). Uma transformação que gira cada vetor em \mathbb{R}^2 por um ângulo fixado θ é chamado uma **rotação** em \mathbb{R}^2 .

Considere a transformação que gira cada vetor no sentido anti-horário por um ângulo positivo θ fixado. Para encontrar as equações relacionando (x, y) com $w = T(x, y)$, seja ϕ o ângulo entre o vetor (x, y) e o semieixo positivo x e seja $r = \|(x, y)\| = \|w\|$. Por trigonometria básica,

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

e

$$w_1 = r \cos(\theta + \phi), \quad w_2 = r \sin(\theta + \phi).$$

Aplicando as identidades trigonométricas, resulta em

$$\begin{aligned} w_1 &= r \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi \\ w_2 &= r \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi. \end{aligned}$$

Com isso, chegamos a

$$\begin{aligned} w_1 &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ w_2 &= x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned}$$

As equações finais acima são lineares, de modo que T é uma transformação linear; além disto, segue destas equações que a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.52. Se cada vetor em \mathbb{R}^2 é rotacionado por um ângulo de $\pi/6$ rad ($= 30^\circ$), então a imagem \vec{w} de um vetor

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

é

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}.$$

Definição 2.53 (Dilatações e Contrações). Se k é um escalar não-negativo, então a transformação $T(x, y) = k(x, y)$ de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 é chamada uma **homotetia de razão** k . Especificamente, a transformação é **uma contração de razão** k se $0 \leq k \leq 1$ e uma **dilatação de razão** k se $k \geq 1$.

Observação 2.54. O efeito geométrico de uma contração é comprimir cada vetor por um fator k em todas as direções na direção da origem e o efeito geométrico de uma dilatação é esticar cada vetor por um fator k em todas as direções para longe da origem.

Observação 2.55. A contração mais extrema ocorre com $k = 0$, caso em que $T(x, y) = k(x, y)$ reduz à transformação nula $T(x, y) = (0, 0)$, que comprime cada vetor a um único ponto (a origem). Se $k = 1$ então $T(x, y) = k(x, y)$ reduz à transformação identidade $T(x, y) = (x, y)$, que deixa cada vetor inalterado; isto poderia ser considerado tanto uma contração quanto uma dilatação.

Composição de Transformações Lineares

Se $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $T_B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ são transformações lineares com matrizes canônicas dadas respectivamente por A e B então, para cada \vec{x} em \mathbb{R}^2 nós podemos calcular, primeiro, $T_A(\vec{x})$, que é um vetor em \mathbb{R}^2 e depois calcular $T_B(T_A(\vec{x}))$, que é um vetor em \mathbb{R}^2 . Assim, a aplicação de T_A seguida de T_B produz uma transformação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 . Esta transformação é chamada a composição de T_B com T_A e é denotada por $T_B \circ T_A$. Assim,

$$(T_B \circ T_A)(\vec{x}) = T_B(T_A(\vec{x}))$$

A composta $T_B \circ T_A$ é linear pois

$$(T_B \circ T_A)(\vec{x}) = T_B(T_A(\vec{x})) = B(A\vec{x}) = (BA)\vec{x}$$

de modo que $T_B \circ T_A$ é a multiplicação por BA , que é uma transformação linear. Esta fórmula acima também nos informa que a matriz canônica de $T_B \circ T_A$ é BA . Isto ainda pode ser dito pela fórmula

$$T_B \circ T_A = T_{BA}.$$

Exemplo 2.56 (Composição de duas Rotações). Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ transformações lineares que rotacionam os vetores por ângulos θ_1 e θ_2 , respectivamente. Assim, a operação

$$(T_2 \circ T_1)(\vec{x}) = T_2(T_1(\vec{x}))$$

primeiro rotaciona \vec{x} por um ângulo θ_1 , e então, rotaciona $T_1(\vec{x})$ por um ângulo θ_2 . Segue-se que o efeito final de $T_2 \circ T_1$ é rotacionar cada vetor em \mathbb{R}^2 por um ângulo $\theta_1 + \theta_2$. Assim, as matrizes canônicas destas transformações lineares são

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad [T_2] = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

Observação 2.57. Em geral, é importante a ordem pela qual compomos as transformações lineares. Ou seja, a composição não é comutativa.

Exemplo 2.58 (Composição de Duas Reflexões). Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a reflexão em torno do eixo y e $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a reflexão em torno do eixo x . Neste caso, $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$ são idênticas; ambas aplicam cada vetor $\vec{x} = (x, y)$ em seu negativo $-\vec{x} = (-x, -y)$:

$$(T_1 \circ T_2)(x, y) = T_1(x, -y) = (-x, -y)$$

$$(T_2 \circ T_1)(x, y) = T_2(-x, y) = (-x, -y).$$

A igualdade de $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$ também pode ser deduzida mostrando que as matrizes canônicas de T_1 e T_2 comutam:

$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A transformação $T(\vec{x}) = -\vec{x}$ em \mathbb{R}^2 é chamada reflexão em torno da origem. Como vimos nas expressões acima, a matriz canônica desta transformação em \mathbb{R}^2 é

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Composição de Três ou Mais Transformações Lineares

A composição também pode ser definida para três ou mais transformações lineares. Por exemplo, considere as transformações lineares

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad T_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Definimos a composta $(T_3 \circ T_2 \circ T_1) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\vec{x}) = T_3(T_2(T_1(\vec{x})))$$

Pode ser mostrado que esta composição é uma transformação linear e que a matriz canônica de $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)$ está relacionada com as matrizes canônicas T_1, T_2 e T_3 por

$$[(T_3 \circ T_2 \circ T_1)] = [T_3][T_2][T_1].$$

Transformações Lineares Injetoras

As transformações lineares que aplicam vetores (pontos) distintos em vetores (pontos) distintos são de especial importância. Um exemplo de uma tal transformação é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que rotaciona cada vetor por um ângulo θ . É óbvio, geometricamente, que se \vec{u} e \vec{v} são vetores distintos em \mathbb{R}^2 então também os vetores rotacionados $T(\vec{u})$ e $T(\vec{v})$ são distintos.

Definição 2.59. *Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita injetora se T aplica vetores (pontos) distintos de \mathbb{R}^n em vetores (pontos) distintos de \mathbb{R}^m .*

Observação 2.60. *Segue desta definição que para cada vetor \vec{w} na imagem de uma transformação linear injetora T existe exatamente um único vetor \vec{x} tal que $T(\vec{x}) = \vec{w}$.*

2.5 Geometria das Transformações Lineares

Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a transformação matricial cuja matriz canônica é

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

então

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

Existem duas interpretações geométricas igualmente boas desta fórmula. Nós podemos ver as entradas nas matrizes

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

tanto quanto componentes de vetores quanto coordenadas de pontos. Com a primeira interpretação, T leva flechas em flechas e, com a segunda, pontos em pontos.

Expansões e Compressões

Se a coordenada x de cada ponto (x, y) no plano é multiplicada por uma constante positiva k , então o efeito é expandir ou comprimir cada figura plana na direção x . Se $0 < k < 1$, o resultado é uma compressão e se $k > 1$, uma expansão. Analogamente, se a coordenada y de cada ponto (x, y) é multiplicada por uma constante positiva k , obteremos uma compressão (ou expansão) pelo fator k na direção y .

Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma expansão ou compressão de fator k na direção x , então

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz canônica de T é

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente, a matriz canônica da expansão ou compressão na direção y é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Cisalhamentos

Um **cisalhamento de fator k na direção x** é uma transformação que move cada ponto (x, y) paralelamente ao eixo x por uma quantia ky para a nova posição $(x + ky, y)$. Com uma tal transformação, os pontos do eixo x permanecem onde estão, pois $y = 0$. No entanto, à medida que nos afastamos do eixo x , aumenta a magnitude de y , de modo que os pontos mais longe do eixo x são movidos por uma distância maior do que os pontos mais perto do eixo.

Um **cisalhamento de fator k na direção y** é uma transformação que move cada ponto (x, y) paralelamente ao eixo y por uma quantia kx para a nova posição $(x, y + kx)$. Com uma tal transformação, os pontos do eixo y permanecem onde estão e os pontos mais longe do eixo y são movidos por uma distância maior do que os pontos mais perto do eixo.

Verifiquemos que os cisalhamentos são transformações lineares. Se $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é um cisalhamento por k na direção x , então

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz canônica de T é

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, a matriz canônica para o cisalhamento por k na direção y é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}.$$

Observação 2.61. A multiplicação pela matriz identidade 2×2 é a transformação identidade de \mathbb{R}^2 . Esta transformação pode ser vista como uma rotação por um ângulo de 0° ou um cisalhamento na direção tanto x quanto y e de fator $k = 0$, ou ainda como uma expansão ou compressão em x ou y de fator $k = 1$.

Caracterização Geométrica das Transformações Lineares

Teorema 2.62. Se $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a multiplicação por uma matriz elementar, então a transformação é uma das seguintes opções:

- (a) um cisalhamento na direção de um eixo coordenado
- (b) uma reflexão em torno de $y = x$
- (c) uma compressão na direção de um eixo coordenado

- (d) uma expansão na direção de um eixo coordenado
- (e) uma reflexão em torno de um eixo coordenado
- (f) uma compressão ou expansão na direção de um eixo coordenado seguida de uma reflexão em torno de um eixo coordenado

Demonstração. De fato, como a matriz elementar 2×2 resulta da aplicação de uma única operação elementar sobre linhas na matriz identidade 2×2 , ela deve ser de uma das seguintes formas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}.$$

As duas primeiras matrizes representam cisalhamentos na direção de um eixo coordenado e a terceira uma reflexão em torno de $y = x$. Se $k > 0$, as duas últimas matrizes representam uma expansão ou uma compressão na direção de um eixo coordenado, dependendo se $0 \leq k \leq 1$ ou $k \geq 1$. Se $k < 0$ e se expressarmos $k = -k_1$, onde $k_1 > 0$, então as duas últimas matrizes podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Como $k_1 > 0$, o produto em (2.4) representa uma compressão ou expansão na direção x seguida de uma reflexão em torno do eixo y e (2.5) representa uma compressão ou expansão na direção y seguida de uma reflexão em torno do eixo x . No caso em que $k = -1$, as transformações (2.4) e (2.5) são simplesmente reflexões em torno do eixo y e x , respectivamente. ■

Observação 2.63. *As reflexões, rotações, expansões, compressões e cisalhamentos são transformações lineares injetoras. Isso é evidente geometricamente, pois todas essas transformações levam pontos distintos em pontos distintos. Isso também pode ser conferido algebricamente verificando que as matrizes canônicas dessas transformações são invertíveis.*

Teorema 2.64. *Se $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a multiplicação por uma matriz invertível A , então o efeito geométrico de T é o mesmo que uma sucessão apropriada de cisalhamentos, compressões, expansões e reflexões.*

Demonstração. Por ser invertível, A pode ser reduzida à identidade por uma sequência finita de operações elementares sobre linhas. Uma operação elementar sobre linhas pode ser efetuada pela multiplicação à esquerda por uma matriz elementar, de modo que existem matrizes elementares E_1, E_2, \dots, E_k tais que

$$E_k \dots E_2 E_1 A = I$$

Resolvendo em A , obtemos

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} I$$

ou, equivalentemente,

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$$

Esta equação expressa A como um produto de matrizes elementares. O Resultado segue, agora, pelo teorema 2.62. ■

Teorema 2.65. *Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a multiplicação por uma matriz invertível, então:*

- (a) *A imagem de uma reta é uma reta;*
- (b) *A imagem de uma reta pela origem é uma reta pela origem;*
- (c) *As imagens de retas paralelas são retas paralelas;*
- (d) *A imagem do segmento de reta ligando P e Q é o segmento de reta ligando as imagens de P e Q ;*
- (e) *As imagens de três pontos são colineares se, e somente se, os pontos são colineares.*

Observação 2.66. *Segue das partes (c), (d) e (e) que a multiplicação por uma matriz invertível 2×2 leva triângulos em triângulos e paralelogramos em paralelogramos.*

Exemplo 2.67. *O quadrado de vértices $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$, $P_3(1,1)$ e $P_4(0,1)$ é chamado o quadrado unitário. Esboce a imagem do quadrado unitário pela multiplicação por*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução: Pelo teorema 2.65 e como

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a imagem do quadrado é um paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(-1,2)$, $(2,-1)$ e $(1,1)$.

2.6 Transformação do Gato de Arnold

Iremos ilustrar o efeito da transformação do gato de Arnold no quadrado unitário que aparece sombreado e contendo a imagem de um gato. (Figura 2.30)

Passo 1: Cisalhamento na direção x com fator 1.

$$(x, y) \mapsto (x + y, y),$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ y \end{bmatrix}$$

Passo 2: Cisalhamento na direção y com fator 1.

$$(x, y) \longrightarrow (x, x + y),$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x + y \end{bmatrix}$$

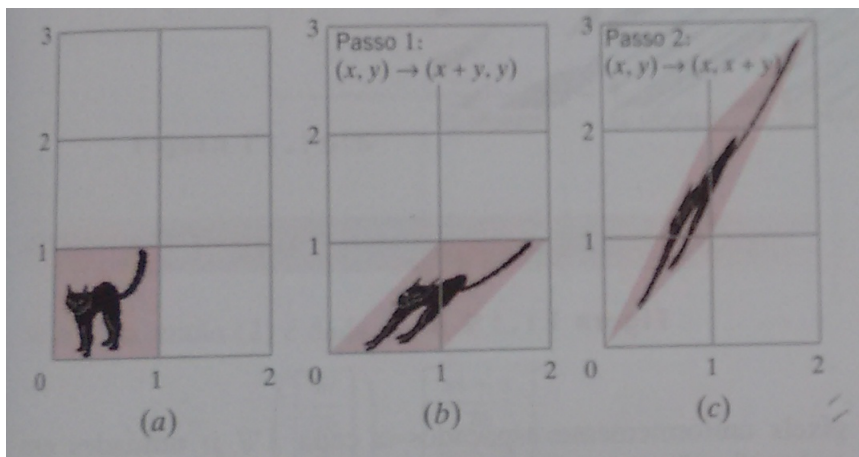


Figura 2.30: Gato de Arnold

Capítulo 3

Deformações e Morfismos Geométricos

As deformações e os morfismos estão entre as mais interessantes técnicas de manipulação de imagens disponíveis para a computação gráfica. No presente capítulo apresetamos como as transformações lineares podem ser usadas para distorcer uma imagem para produzir uma deformação, ou como distorcer e amalgamar duas imagens para produzir o morfismo.

A maioria dos aplicativos de computação gráfica permitem a manipulação de uma imagem de várias maneiras, tais como a mudança de suas proporções, rotações ou cisalhamentos. Uma outra técnica básica de manipulação de imagens é a distorção de uma imagem pelo movimento dos vértices de um retângulo que a contém. Um procedimento mais complicado, chamado *deformação*, consiste em distorcer várias partes da imagem de maneiras diferentes. A deformação de duas imagens por procedimentos complementares com a fusão das deformações obtidas resulta num *morfismo* das duas imagens.

A principal aplicação de deformações e morfismos tem sido a produção de efeitos especiais no cinema, na televisão e na propaganda. No entanto, também surgiram muitas aplicações científicas e tecnológicas para essas técnicas. Por exemplo, o estudo da evolução das formas de organismos vivos, a análise do crescimento e desenvolvimento de organismos vivos, a assistência à cirurgia plástica e de reconstrução, a investigação de variações no projeto de um produto e o “envelhecimento” de fotografias de pessoas desaparecidas ou de suspeitos da polícia.

3.1 Deformações e Morfismo

Começaremos esta seção pela descrição de uma deformação simples de uma região triangular do plano, cujos vértices são três pontos não colineares v_1, v_2 e v_3 . Vamos chamar este triângulo de *triângulo inicial*. Se v é um ponto qualquer no triângulo inicial, existem constantes únicas c_1 e c_2 tais que

$$v - v_3 = c_1(v_1 - v_3) + c_2(v_2 - v_3). \quad (3.1)$$

A equação (3.1) dá o vetor $v - v_3$ como uma (única) combinação linear dos dois vetores linearmente independentes $v_1 - v_3$ e $v_2 - v_3$ em relação a uma origem em v_3 .

Se colocarmos $c_3 = 1 - c_1 - c_2$, então poderemos reescrever (3.1) como

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3, \quad (3.2)$$

onde

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1, \quad (3.3)$$

pela definição de c_3 . Se (3.2) e (3.3) são válidos e se, além disso, os coeficientes c_1, c_2 e c_3 forem não negativos, diremos que v é uma *combinação linear convexa* dos vetores v_1, v_2 e v_3 .

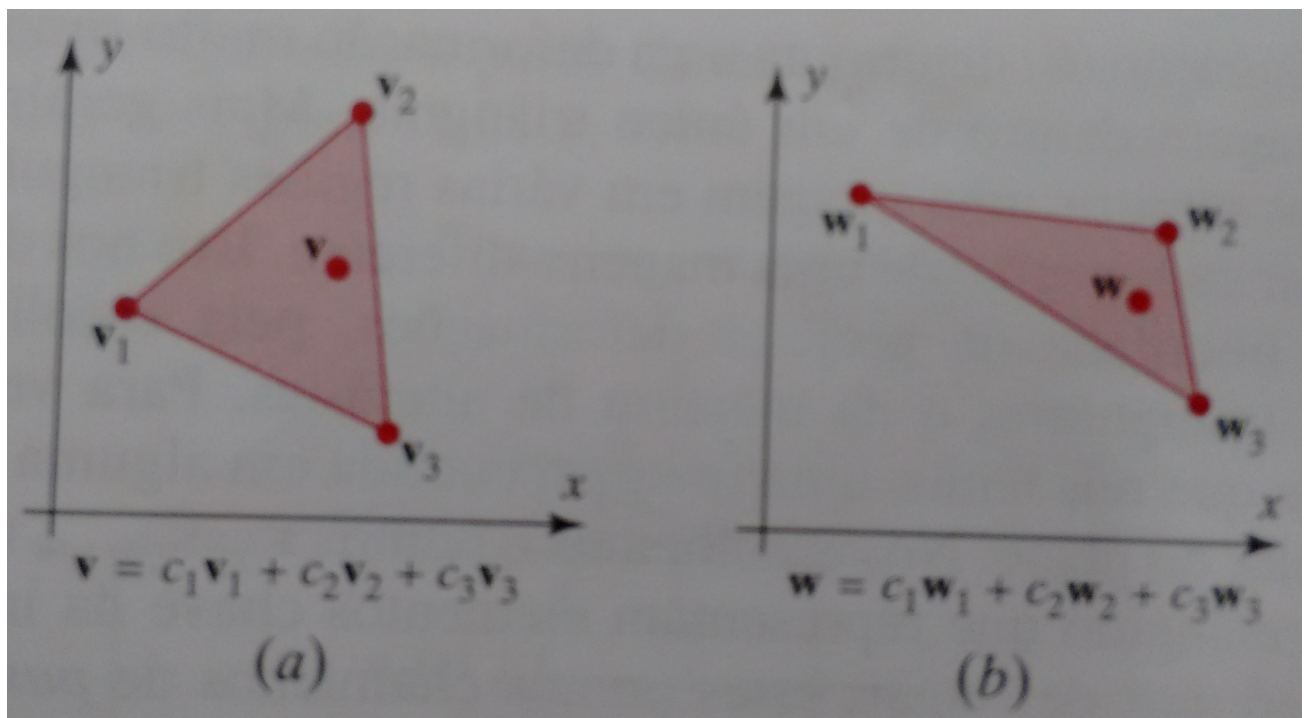


Figura 3.1: Triângulo Inicial

Agora, dados os três pontos não colineares w_1, w_2 e w_3 dos vértices de um *triângulo final*, existe uma única *transformação afim* que leva v_1 em w_1 , v_2 em w_2 e v_3 em w_3 . Ou seja, existe uma única matriz 2×2 invertível M e um único vetor b tais que

$$w_i = Mv_i + b, \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \dots \quad (3.4)$$

Além disto, pode ser mostrado que por esta transformação afim, a imagem w do vetor v de (3.2) é

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 \quad (3.5)$$

Esta é uma propriedade básica de transformações afins: levar uma combinação convexa de vetores na mesma combinação convexa das imagens dos vetores.

Agora suponha que o triângulo inicial contém uma imagem dentro dele. Ou seja, a cada ponto do triângulo inicial está associado um nível de cinza, digamos, 0 para branco e 100 para preto, com todos os níveis de cinza entre 0 e 100. Em outras palavras, definiremos uma função escalar ρ_0 , chamada *densidade de imagem*

do triângulo inicial, de tal modo que $\rho_0(v)$ é o nível de cinza associado ao ponto v do triângulo inicial. Agora podemos definir uma imagem no triângulo final, chamada *deformação* da imagem original, definindo a densidade de imagem ρ_1 do triângulo final associado a um ponto w dentro do triângulo final o nível de cinza do ponto v do triângulo inicial que é levado em w . Em forma de equação, a densidade de imagem ρ_1 é determinada por

$$\rho_1(w) = \rho_0(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) \quad (3.6)$$

Deste modo, à medida que c_1 , c_2 e c_3 variam sobre todos os valores não negativos cuja soma é 1, a expressão (3.5) gera todos os pontos w do triângulo final e (3.6) gera os correspondentes níveis de cinza $\rho_1(w)$ destes pontos da imagem deformada (Figura 3.2).

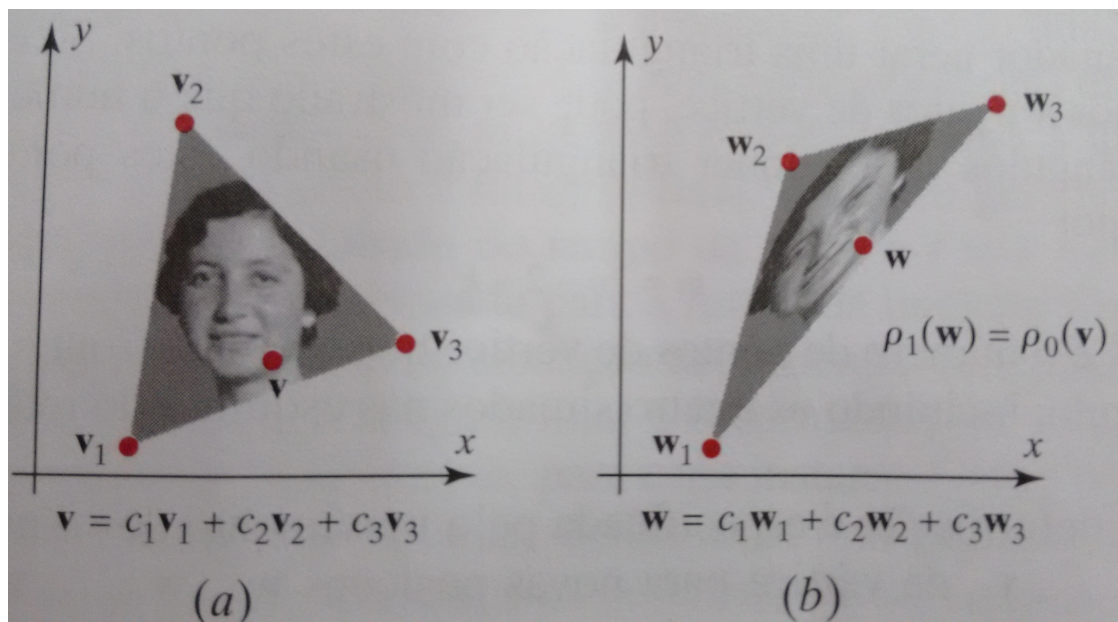


Figura 3.2: Triângulo Final

A equação (3.6) determina uma deformação muito simples de uma imagem dentro de um único triângulo. Mas, geralmente, podemos repartir uma imagem em várias regiões triangulares e deformar cada região de uma maneira diferente. Isto nos dá uma grande liberdade de projetar deformações, pela escolha das regiões triangulares e da maneira de alterá-las. Para ver isto, suponha que temos uma imagem contida em alguma região retangular do plano. Escolhemos n pontos v_1, v_2, \dots, v_n dentro do retângulo que representam elementos chave da imagem que queremos deformar; estes pontos chamamos de **pontos de vértice** (Figura 3.3 a). Uma vez escolhidos os pontos de vértices, completamos uma **triangulação** da região retangular, ou seja, traçamos retas entre os pontos de vértices de tal modo que as seguintes condições são satisfeitas (Figura 3.3 b):

1. As retas formam os lados de uma coleção de triângulos.
2. As retas não se cruzam.
3. Cada ponto de vértice é o vértice de pelo menos um triângulo.

4. A união dos triângulos é o retângulo.

5. A coleção de triângulos é máxima (ou seja, não restam vértices para conectar).

Observe que a condição 4 requer que cada esquina do retângulo que contém a imagem seja um ponto de vértice.

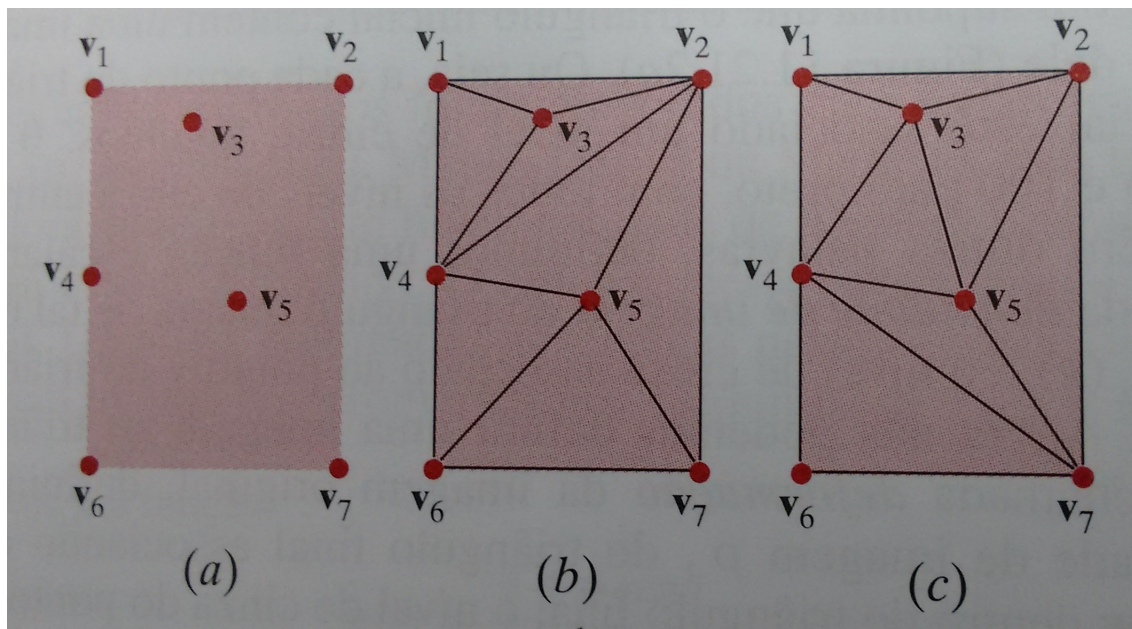


Figura 3.3: Pontos no Retângulo

Sempre podemos formar uma triangulação a partir de quaisquer n pontos de vértice, mas a triangulação não é necessariamente única. Por exemplo, as (Figuras 3.3 b) e c) são duas triangulações diferentes do mesmo conjunto de vértices da (Figura 3.3 a). Como existem vários algoritmos computacionais que efetuam triangulações com rapidez, não é necessário fazer este trabalho tedioso à mão; nós só precisamos especificar os pontos de vértice que desejamos e deixamos o computador gerar uma triangulação com estes pontos. Se escolhermos n pontos de vértice, pode ser mostrado que o número m de triângulos de qualquer triangulação usando estes pontos é dado por

$$m = 2n - 2 - k, \quad (3.7)$$

onde k é o número de pontos de vértice que estão na fronteira do retângulo, incluindo os quatro situados nas esquinas do retângulo.

A deformação é especificada pelo movimento dos n pontos v_1, v_2, \dots, v_n de vértices para novas posições w_1, w_2, \dots, w_n de acordo com as mudanças que queremos efetuar na imagem (Figura 3.4 a e b). No entanto, impomos duas restrições aos movimentos dos pontos de vértice:

1. Os quatro pontos de vértice nas esquinas do retângulo devem permanecer fixos e todos os pontos de vértice situados nos lados do retângulo devem permanecer fixos ou então mover para outro ponto no mesmo lado do retângulo. Todos os demais no interior pontos de vértice devem permanecer no interior do retângulo.

2. Os triângulos determinados pela triangulação não podem ficar sobrepostos depois de efetuado o movimento de seus vértices.

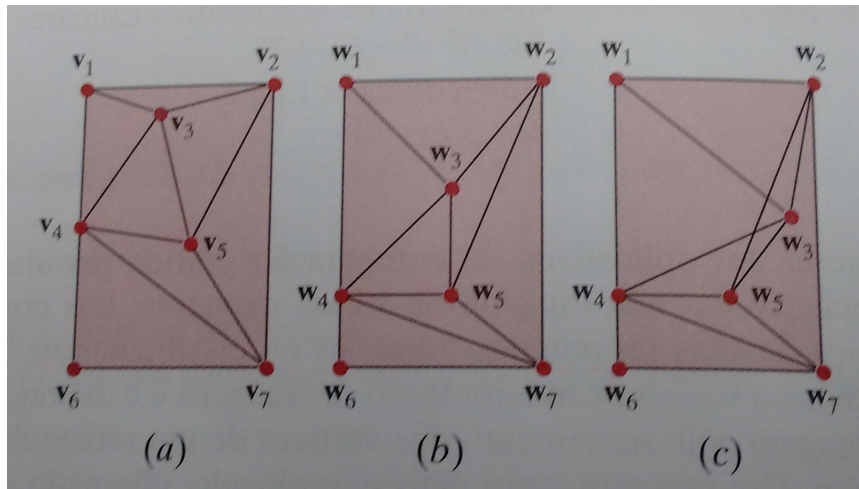


Figura 3.4: Retângulo Final

A primeira restrição garante a preservação da forma retangular da imagem inicial. A segunda restrição garante que os pontos de vértice movimentados ainda formam uma triangulação do retângulo e que a triangulação nova é similar à original. Por exemplo na (Figura 3.4 c) não é um movimento permitido aos pontos de vértice mostrados mostrados na (Figura 3.4 a). Embora uma violação desta condição possa ser tratada matematicamente sem muito esforço adicional, as deformações resultantes em geral produzem resultados artificiais e nós não trataremos disto aqui.

Na (Figura 3.5) temos uma deformação de uma fotografia de uma mulher usando uma triangulação de 94 pontos de vértice e 179 triângulos. Observe como os pontos de vértice da triangulação inicial foram escolhidos ao longo de características essenciais da imagem (contorno dos cabelos, olhos, lábios, etc.). Estes pontos de vértice foram movidos para as posições finais correspondentes às mesmas características numa fotografia da mulher tirada 20 anos depois da imagem inicial. Assim, a imagem deformada representa a mulher forçada para seu formato mais idoso mas usando os níveis de cinza de quando era mais jovem.

Deformação Dependente do Tempo

Uma **deformação dependente do tempo** é um conjunto de deformações geradas quando os pontos de vértice da imagem inicial são movidos continuamente ao longo do tempo desde suas posições originais até posições finais especificadas. Isto nos dá uma animação na qual a imagem inicial é deformada continuamente até uma deformação final. Vamos escolher unidades de tempo de tal modo que $t = 0$ corresponde à imagem inicial e $t = 1$ corresponde à deformação final. A maneira mais simples de mover os pontos de vértice do instante de tempo 0 ao instante de tempo 1 é com velocidade constante ao longo de caminhos retos ligando as posições iniciais às posições finais.

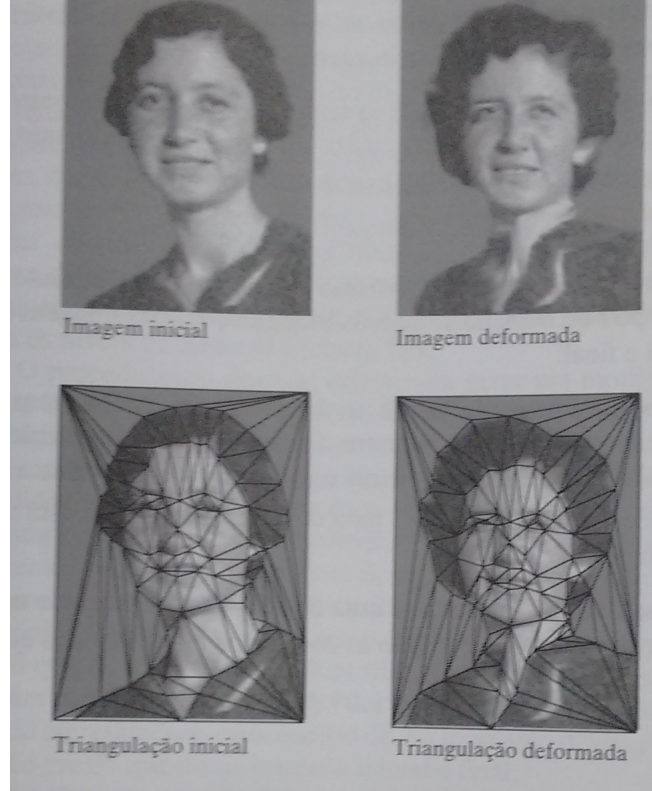


Figura 3.5: Fotografia

Para descrever um tal movimento, seja $u_i(t)$ a posição do i -ésimo ponto de vértice em um instante de tempo t entre 0 e 1. Assim, $u_i(0) = v_i$ (sua posição na imagem inicial) e $u_i(1) = w_i$ (sua posição na imagem final). Entre um e outro ponto, nós determinamos sua posição por

$$u_i(t) = (1 - t)v_i + tw_i. \quad (3.8)$$

Observe que (3.8) exprime $u_i(t)$ como uma combinação convexa de v_i e w_i para cada t em $[0, 1]$. A Figura 3.6 ilustra uma triangulação dependente do tempo de uma região retangular plana com seis pontos de vértice. As linhas conectando os pontos de vértice em instantes diferentes são os caminhos no espaço-tempo destes pontos de vértices neste diagrama espaço-temporal.

Uma vez calculadas as posições dos pontos de vértices em instantes de tempo t , efetuamos uma deformação entre a imagem inicial e a triangulação no instante t determinada pelos pontos de vértice movidos até aquele instante t . A Figura 3.7 mostra uma deformação dependente do tempo em cinco valores de t gerados a partir da deformação entre $t = 0$ e $t = 1$.

3.2 Morfismo

Um **morfismo dependente do tempo** pode ser descrito como uma combinação de duas deformações dependentes do tempo de duas imagens distintas, usando duas triangulações, que associam características correspondentes das duas imagens. Uma

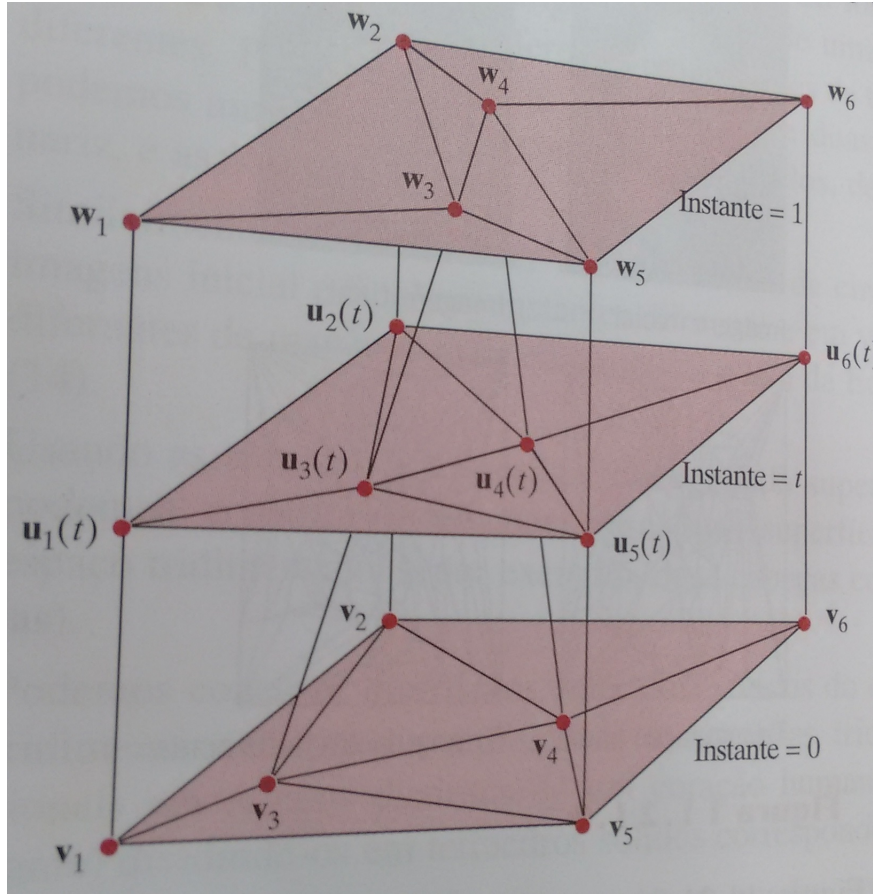


Figura 3.6: Figura Espaço Tempo

das duas imagens é escolhida como imagem inicial e a outra como imagem final. Primeiro geramos uma deformação dependendo do tempo $t = 0$ a $t = 1$ na qual a imagem inicial é deformada para a forma da imagem final. Em seguida geramos uma deformação dependendo do tempo de $t = 0$ a $t = 1$ na qual a imagem final é deformada para a forma da imagem inicial. Finalmente, para cada instante t entre 0 e 1 criamos um morfismo das duas deformações no instante t usando uma média ponderada dos dois níveis de cinza.

A Figura 3.5 mostra duas fotografias de uma mulher tomadas num intervalo de 20 anos. A seguir nas fotografias estão duas triangulações, nas quais associamos as características correspondentes das duas fotografias. A Figura 3.7 mostra o morfismo dependendo do tempo entre estas duas imagens para cinco instantes de tempo t entre 0 e 1.

O procedimento para produzir um tal morfismo é delineado nos nove passos seguintes:

Passo 1. Dados uma imagem inicial com densidade de imagem ρ_0 e uma imagem final com densidade de imagem ρ_1 , posicione n pontos de vértice v_1, v_1, \dots, v_n na imagem inicial em características essenciais da imagem.

Passo 2. Posicione n pontos vértice correspondentes, w_1, w_2, \dots, w_n na imagem final nas características essenciais correspondentes da imagem.

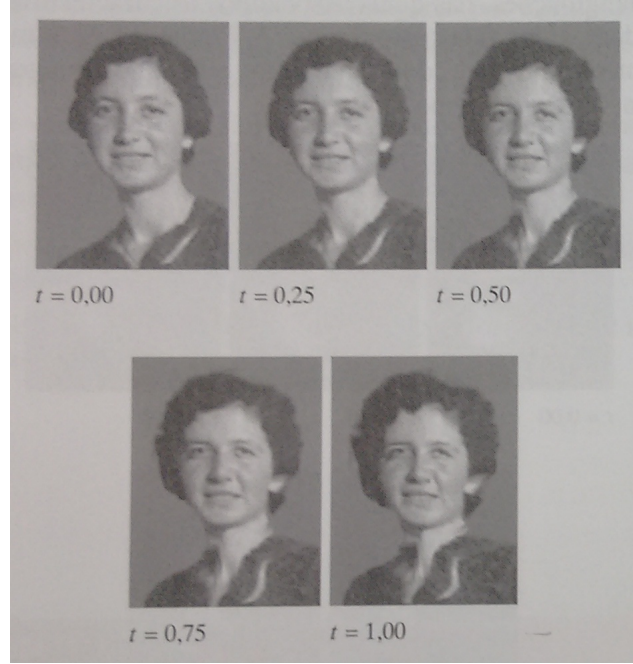


Figura 3.7: Fotografia Tempo

Passo 3. Triangule as imagens inicial e final de maneiras similares desenhando linhas retas entre os pontos de vértice correspondentes de cada imagem.

Passo 4. Para cada instante de tempo t entre 0 e 1, encontre os pontos de vértice $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ no morfismo da imagem daquele instante usando a fórmula

$$u_i(t) = (1 - t)v_i + tw_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.9)$$

Passo 5. Triangule o morfismo da imagem do instante de tempo t de maneira similar às triangulações das imagens inicial e final.

Passo 6. Para cada ponto u do morfismo da imagem do instante de tempo t , encontre o triângulo da triangulação ao qual ele pertence e os vértices $u_i(t), u_j(t)$ e $u_k(t)$ deste triângulo.

Passo 7. Expresse u como uma combinação convexa de $u_i(t), u_j(t)$ e $u_k(t)$ encontrando as constantes c_i, c_j e c_k tais que

$$u = c_i u_i(t) + c_j u_j(t) + c_k u_k(t) \quad (3.10)$$

e

$$c_i + c_j + c_k = 1 \quad (3.11)$$

Passo 8. Determine a localização do ponto u nas imagens inicial e final usando

$$v = c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k \quad (\text{na imagem inicial}) \quad (3.12)$$

e

$$w = c_i w_i + c_j w_j + c_k w_k \quad (\text{na imagem final}) \quad (3.13)$$

Passo 9. Finalmente, determine a densidade da imagem $\rho_t(u)$ no ponto u do morfismo da imagem usando

$$\rho_t(u) = (1-t)\rho_0(v) + t\rho_1(w) \quad (3.14)$$

Referências Bibliográficas

- [1] ANTON, H; RORRES, C. *Álgebra linear com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2001.
- [2] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. *Álgebra linear*. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980. 411 p.
- [3] CRISSAFF, L. S.; FRENSEL, K. R.; GÓMEZ, J. J. D. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [4] DANTE, L.R. *Matemática: Contexto e Aplicações*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.
- [5] LIMA, E. L. *Coordenadas no plano*. Rio de Janeiro: SBM/IMPA, 2002.
- [6] MUNIZ NETO, A. C. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [7] SHERVATOV, V.G. *Funciones Hiperbólicas*. Editora Mir, 2ª Ed. Moscou, 1984.